



Buku Ajar Kalkulus Lanjutan

Dr. Mas'ud B., M.Pd

BUKU AJAR KALKULUS LANJUTAN

Penulis:

Dr. Mas'ud B., M.Pd



MENARA PRESS INDONESIA

BUKU AJAR

KALKULUS LANJUTAN

Penulis:

Dr. Mas'ud B., M.Pd

Editor: Dr. Marwati Abd. Malik, M.Pd.

Penyunting: Pegi Syahri Rahmadhianas, S.H.

Desain Sampul dan Tata Letak: Neza Sartika

Diterbitkan oleh:

Menara Press Indonesia

Anggota IKAPI No. 063/SBA/2024

Perumahan Pasadena Residence Blok K No.8, Kel. Lubuk
Minturun,

Kec. Koto Tangah, Kota Padang, Provinsi Sumatera Barat

Email: menarapressindonesia@gmail.com

Website: www.menarapress.com

ISBN: 978-634-96177-3-4

Cetakan pertama, Agustus 2025

© Hak cipta dilindungi undang-undang.

Dilarang keras memperbanyak, memfotokopi, Sebagian atau
seluruh isi buku tanpa izin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan buku ajar ini yang berjudul **“Buku Ajar Kalkulus Lanjutan”**. Buku ini disusun sebagai salah satu bentuk kontribusi dalam mendukung peningkatan kualitas proses pembelajaran di perguruan tinggi, khususnya dalam mata kuliah kalkulus tingkat lanjut.

Penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu dalam proses penyusunan buku ini. Ucapan terima kasih khusus disampaikan kepada kolega dosen di Program Studi Pendidikan Matematika yang telah memberikan masukan berharga, serta kepada para mahasiswa yang telah menjadi mitra belajar dalam uji coba materi-materi dalam buku ini. Tidak lupa pula penulis mengucapkan terima kasih kepada keluarga tercinta atas dukungan moral dan spiritual yang tiada henti.

Latar belakang penyusunan buku ini adalah kebutuhan akan bahan ajar yang sistematis, kontekstual, dan aplikatif dalam membahas konsep-konsep lanjutan dalam kalkulus, seperti fungsi multivariabel, integral lipat, dan aplikasi diferensial. Buku ini disusun untuk membantu mahasiswa mengembangkan pemahaman konseptual dan keterampilan analitis dalam menyelesaikan persoalan-persoalan matematika tingkat lanjut yang bersifat teoritis maupun terapan.

Penulis berharap buku ajar ini dapat menjadi sumber belajar yang bermanfaat baik bagi mahasiswa maupun dosen, serta dapat digunakan sebagai acuan dalam proses pembelajaran kalkulus lanjutan di berbagai perguruan tinggi. Penulis juga berharap buku ini dapat mendorong pembaca untuk berpikir kritis dan memahami kalkulus secara mendalam, tidak sekadar sebagai rangkaian rumus, tetapi sebagai alat berpikir yang logis dan aplikatif.

Akhir kata, penulis menyadari bahwa buku ini masih memiliki kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan demi perbaikan dan penyempurnaan di masa yang akan datang.

Parepare, Juli 2025

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iii
BAB 1 PENDAHULUAN.....	1
A. Sasaran Pengguna Buku	2
B. Peta Konsep.....	3
C. Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK) – Kalkulus Lanjutan	3
D. Rencana Pembelajaran Semester (RPS).....	6
BAB 2 DIFERENSIAL PARSIAL ORDE SATU	11
A. Fungsi Tunggal.....	11
B. Fungsi Majemuk	18
BAB 3 PERSAMAAN BIDANG SINGGUNG DAN GARIS NORMAL	26
A. Persamaan Bidang Singgung	26
B. Persamaan Garis Normal	29
BAB 4 DIFERENSIAL TOTAL	39
A. Orde Satu Fungsi Tunggal.....	39
B. Orde Satu Fungsi Majemuk	43
C. Orde Tinggi Fungsi Tunggal.....	56
BAB 5 INTEGRAL LIPAT	61
A. Integral Lipat Dua	61
B. Integral Lipat Tiga	67

BAB 6 DERET FOURIER	81
A. Fungsi Periodik.....	82
B. Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil	86
C. Sinus Dan Cosinus Fourier $1/2$ - Jangkauan	88
D. Identitas Parseval	91
BAB 7 FUNGSI GAMMA DAN FUNGSI BETA.....	94
A. Fungsi Gamma.....	95
B. Fungsi Beta	102
BAB 8 TRANSFORMASI LAPLACE.....	110
A. Pengertian Transformasi Laplace.....	111
B. Beberapa Sifat Penting dari Transformasi Laplace	115
C. Transformasi Laplace Turunan dan Integral	117
D. Invers dari Transformasi Laplace.....	120
DAFTAR PUSTAKA	123
GLOSARIUM.....	126
BIODATA PENULIS.....	128

BAB 1

PENDAHULUAN

Kalkulus merupakan salah satu cabang matematika yang paling fundamental dan memiliki aplikasi luas di berbagai bidang ilmu, seperti fisika, teknik, ekonomi, dan ilmu komputer. Setelah menyelesaikan mata kuliah Kalkulus Dasar, mahasiswa perlu melanjutkan ke tahap selanjutnya yaitu Kalkulus Lanjutan, yang mencakup topik-topik seperti diferensial parsial, diferensial total, integral lipat, deret Fourier, fungsi Gamma dan Beta, serta transformasi Laplace. Topik-topik ini tidak hanya penting secara teoritis namun juga sangat aplikatif dalam memodelkan dan menyelesaikan permasalahan nyata.

Pentingnya pemahaman mendalam terhadap konsep-konsep kalkulus lanjutan mendorong perlunya buku ajar yang tidak hanya membahas teori tetapi juga memberikan contoh aplikatif dan latihan soal yang relevan. Dengan pendekatan yang sistematis, buku ini diharapkan dapat menjembatani kesenjangan antara konsep teoritis dan praktik pemecahan masalah yang kompleks.

Buku ajar ini disusun dengan tujuan utama untuk menyediakan bahan ajar yang komprehensif, sistematis, dan aplikatif dalam mendukung proses pembelajaran mata

kuliah Kalkulus Lanjutan. Secara spesifik, tujuan penyusunan buku ini adalah:

1. Membantu mahasiswa memahami dan menguasai konsep-konsep lanjutan dalam kalkulus secara bertahap.
2. Menyediakan contoh-contoh soal aplikatif yang dapat mengembangkan kemampuan berpikir analitis dan kritis mahasiswa.
3. Menyelaraskan materi ajar dengan capaian pembelajaran mata kuliah (CPMK) dan Rencana Pembelajaran Semester (RPS).
4. Menjadi referensi utama bagi dosen dan mahasiswa dalam proses perkuliahan dan pembelajaran mandiri.

A. Sasaran Pengguna Buku

Buku ini ditujukan bagi mahasiswa semester 4 pada Program Studi Pendidikan Matematika, serta program studi lain yang memiliki mata kuliah Kalkulus Lanjutan. Buku ini juga relevan digunakan oleh dosen sebagai bahan ajar utama dalam perkuliahan serta oleh mahasiswa sebagai bahan belajar mandiri. Selain itu, buku ini juga ditujukan bagi siapa saja yang ingin mempelajari dan memperdalam konsep-konsep Kalkulus Lanjutan secara sistematis dan aplikatif, baik untuk keperluan akademik, riset, maupun pengembangan kompetensi pribadi di bidang matematika dan sains terapan.

B. Peta Konsep

Berikut ini adalah peta konsep yang menggambarkan struktur isi buku ini:



Setiap topik akan dikaji melalui pendekatan konseptual, matematis, dan aplikatif yang berorientasi pada pembentukan keterampilan berpikir tingkat tinggi (HOTS).

C. Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK) – Kalkulus Lanjutan

- **Mata Kuliah:** Kalkulus Lanjutan

- **Semester:** 4
- **Bobot:** 3 SKS (Teori)
- **Pendekatan:** Outcome-Based Education (OBE) dan CASE Method

No	CPMK	Sub-CPMK	Aktivitas CASE Method	Indikator Keberhasilan
1	Mampu menjelaskan konsep diferensial parsial, diferensial total, integral lipat, dan transformasi Laplace.	Menjelaskan pengertian dan rumus dasar masing-masing topik.	C (<i>Contextual</i>): Studi kasus fenomena fisis atau teknik yang melibatkan kalkulus.	Mampu menjelaskan dan memberi contoh konsep dengan benar dan relevan.
2	Mampu menganalisis fungsi multi-variabel menggunakan turunan parsial dan diferensial total.	Menggunakan rumus turunan parsial dan total pada fungsi satu dan banyak variabel.	A (<i>Analytical</i>): Analisis hubungan variabel dari fenomena.	Mampu mengerjakan soal-soal analisis fungsi dengan ketepatan $\geq 75\%$.
3	Mampu menerapkan	Menghitung volume dan massa	S (<i>Solution</i>): Pemecahan	Menyelesaikan soal-soal aplikasi

	metode integral lipat untuk menyelesaikan masalah geometri dan fisika.	benda menggunakan integral lipat dua dan tiga.	masalah dengan model integral lipat.	dengan benar dan menggunakan pendekatan yang tepat.
4	Mampu menyusun representasi deret Fourier serta menjelaskan aplikasinya dalam pemrosesan sinyal.	Menguraikan fungsi periodik menjadi deret Fourier.	S (Solution): Penerapan deret Fourier dalam kasus nyata.	Memodelkan dan menyelesaikan soal deret Fourier dengan akurat.
5	Mampu menerapkan transformasi Laplace untuk menyelesaikan masalah diferensial biasa.	Menyelesaikan persamaan diferensial menggunakan transformasi Laplace.	S (Solution): Menyusun solusi sistem menggunakan metode transformasi.	Menghasilkan solusi sistem dengan benar dan menjelaskan langkahnya.

6	Mampu mengevaluasi hasil dan langkah penyelesaian soal kalkulus lanjutan secara kritis dan reflektif.	Menganalisis kesalahan umum dalam proses penyelesaian masalah.	E (<i>Evaluation</i>): Refleksi terhadap solusi dan diskusi kesalahan/ alternatif pendekatan.	Menulis evaluasi pemecahan masalah dan merekomendasikan perbaikan yang logis.
---	---	--	---	---

D. Rencana Pembelajaran Semester (RPS)

I. Informasi Umum

- **Program Studi:** Pendidikan Matematika
- **Mata Kuliah:** Kalkulus Lanjutan
- **Kode Mata Kuliah:**
- **Semester:** 4
- **Bobot SKS:** 3 SKS (3 Teori)

II. Capaian Pembelajaran

A. Capaian Pembelajaran Lulusan (CPL)

- **CPL-PM1:** Menguasai konsep dan prinsip matematika lanjut.

- **CPL-PM2:** Mampu menerapkan matematika dalam pembelajaran dan pemecahan masalah.
- **CPL-PM3:** Mampu berkomunikasi ilmiah secara lisan dan tulisan dalam bidang pendidikan matematika.

B. Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK)

1. Menjelaskan konsep diferensial parsial, diferensial total, integral lipat, deret Fourier, dan transformasi Laplace.
2. Menganalisis fungsi multivariabel menggunakan diferensial parsial dan total.
3. Menerapkan integral lipat untuk perhitungan volume dan massa.
4. Menyusun deret Fourier dari fungsi periodik.
5. Menerapkan transformasi Laplace untuk menyelesaikan masalah diferensial.
6. Mengevaluasi penyelesaian masalah kalkulus lanjutan secara reflektif dan logis.

III. Pendekatan dan Strategi Pembelajaran

- **Pendekatan:** Outcome-Based Education (OBE), CASE Method (Contextual, Analytical, Solution, Evaluation)
- **Metode Pembelajaran:** Diskusi interaktif, problem-based learning, pemecahan masalah kontekstual, studi kasus, presentasi kelompok, evaluasi mandiri.

IV. Rencana Pembelajaran Mingguan (RPM)

Rencana Pembelajaran Mingguan (RPM) Kalkulus Lanjutan – Semester 4

Ming	Sub-CPMK	Materi Pokok	Kegiatan Pembelajaran (CASE)	Metode dan Strategi	Penilaian
1	CPMK 1	Pengantar Kalkulus Lanjutan	<i>Contextual:</i> Eksplorasi aplikasi kalkulus dalam sains	Ceramah, diskusi	Kuis awal, partisipasi
2	CPMK 1	Fungsi Multivariabel	<i>Analytical:</i> Mengkaji grafik dan domain fungsi	Diskusi kelompok	Tugas tertulis
3	CPMK 2	Turunan Parsial	<i>Solution:</i> Latihan soal dan derivasi	Pemecahan masalah	Penilaian formatif
4	CPMK 2	Diferensial Total Orde Satu	<i>Evaluation:</i> Uji pemahaman lewat kasus kontekstual	Presentasi mini, refleksi	Rubrik refleksi dan kuis

5	CPMK 2	Diferensial Total Orde Tinggi	<i>Analytical:</i> Penurunan turunan parsial campuran	Diskusi, latihan mandiri	Tugas individu
6	CPMK 2	Diferensial Total Fungsi Majemuk	<i>Solution:</i> Perhitungan rantai dan substitusi variabel	Latihan bertahap	Kuis dan latihan terstruktur
7	CPMK 3	Integral Lipat Dua	<i>Contextual:</i> Volume dan area di bawah permukaan	Studi kasus, latihan soal	Penilaian formatif
8	-	UTS	----- ----- -----	----- -----	-----
9	CPMK 3	Integral Lipat Tiga	<i>Analytical:</i> Massa benda 3D dengan kerapatan variabel	Diskusi kontekstual	Tes singkat dan latihan soal
10	CPMK 4	Deret Fourier (Pengantar dan Konsep)	<i>Contextual:</i> Suara dan gelombang periodik	Video interaktif, diskusi	Kuis reflektif
11	CPMK 4	Penyusunan Deret Fourier	<i>Solution:</i> Menghitung koefisien Fourier	Latihan bertahap	Tugas individu
12	CPMK 4	Aplikasi Deret Fourier	<i>Evaluation:</i> Studi kasus dalam sinyal dan	Presentasi, refleksi	Penilaian berbasis rubrik

	kesalahan umum
S	

Catatan Implementasi CASE Method:

- **Contextual:** Materi dibuka dengan konteks nyata atau aplikatif.
- **Analytical:** Mahasiswa menganalisis bentuk matematis, grafik, dan hubungan variabel.
- **Solution:** Mahasiswa menyusun strategi penyelesaian soal dan menerapkannya.
- **Evaluation:** Mahasiswa mengevaluasi solusi, menganalisis kesalahan, dan memberikan refleksi

BAB 2

DIFERENSIAL PARSIAL ORDE SATU

A. Fungsi Tunggal

Capaian Pembelajaran Bab Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Memahami konsep turunan parsial fungsi satu variabel bebas.
2. Menghitung turunan parsial pertama dan kedua dari fungsi dua peubah.
3. Menerapkan konsep diferensial parsial dalam menyelesaikan masalah matematika dan aplikasi.

1. Pengantar Konseptual

Dalam kehidupan nyata, banyak fenomena melibatkan fungsi dari lebih dari satu variabel. Sebagai contoh, suhu di suatu lokasi bergantung pada waktu dan tempat. Dalam bab ini, kita akan membahas bagaimana perubahan nilai fungsi yang melibatkan satu variabel bebas dapat dianalisis melalui konsep diferensial parsial.

2. Uraian Materi

a. Definisi Turunan Parsial

Jika adalah suatu fungsi dua variabel yang kontinu, maka turunan parsial terhadap, dengan dianggap konstan, didefinisikan sebagai: Begitu pula turunan parsial terhadap. Diferensial parsial adalah penurunan sebagian, dan Fungsi Tunggal hanya ada satu fungsi. Jadi, dapat disimpulkan bahwa Diferensial Parsial Fungsi Tunggal adalah penurunan sebagian yang dilakukan terhadap suatu fungsi. Pada dasarnya, aturan pada diferensial biasa sama saja dengan diferensial parsial. yang membedakan, pada diferensial biasa hanya terdapat satu variabel itu. Sedangkan, pada diferensial parsial terdapat lebih dari satu variabel pada suatu fungsi yang kemudian jika fungsi tersebut diturunkan terhadap variable tertentu maka variabel yang lainnya dianggap konstan.

Pengertian rumus

$$y = f(x)$$

$$\text{Diferensial fungsi } \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$z = f(x, y)$$

Diferensial fungsi menurut x, y dipandang sebagai konstan

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Diferensial fungsi menurut y, x dipandang sebagai konstan

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(y + \Delta y, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Notasi diferensial parsial:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = f_x(x, y) = \frac{\delta f}{\delta x} = D_x f$$

Kita ketahui bersama bahwa simbol fungsi biasa yaitu:

$$y = f(x)$$

Sedangkan turunannya:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Pengertian parsial dapat didefinisikan sebagai turunan sebagian-sebagian dengan simbol $\frac{\delta z}{\delta x}$, dimana simbol δ dibaca “do”

Misalkan sebuah fungsi $y = f(x)$

$$\text{Turunannya} = \frac{dy}{dx}$$

Turunan parsialnya $\frac{\delta y}{\delta x}$ (dibaca “do y per do x”)

Misalkan sebuah fungsi $z = f(x, y)$

Maka diferensial parsialnya:

$$\frac{\delta z}{\delta x} \& \frac{\delta z}{\delta y} \text{ (dibaca “do z per do x dan do z per do y”)}$$

Mengandung makna:

$$\frac{\delta z}{\delta x} \text{ (diturunkan ke } x, y \text{ dianggap konstan) dan}$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} \text{ (diturunkan ke } y, x \text{ dianggap konstan)}$$

Jika suatu fungsi $w = f(x, y, z)$, maka diferensial parsialnya adalah:

$$\frac{\delta w}{\delta x}, \frac{\delta w}{\delta y}, \frac{\delta w}{\delta z}$$

Fungsi w adalah suatu fungsi yang variabel x, y , dan z . dan jika fungsi w diturunkan terhadap x maka y, z dianggap konstan dinotasikan dengan $\frac{\delta w}{\delta x}$, jika fungsi w diturunkan terhadap y maka x, z dianggap konstan dinotasikan dengan $\frac{\delta w}{\delta y}$

Begitupun jika diturunkan terhadap z

Jadi secara umum jika ada fungsi:

$$w = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Maka diferensial parsialnya:

$$\frac{\delta w}{\delta x_1}, \frac{\delta w}{\delta x_2}, \frac{\delta w}{\delta x_3}, \dots, \frac{\delta w}{\delta x_n}$$

Contoh: Tentukan diferensial parsila dari fungsi berikut:

1. $z = x^3 + y^4$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 3x^2$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = 4y^3$$

2. $z = xy$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = y$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = x$$

3. $w = x^2 + y^3 + z^4$

$$\frac{\delta w}{\delta x} = 2x$$

$$\frac{\delta w}{\delta y} = 3y^2$$

$$\frac{\delta w}{\delta z} = 4z^3$$

4. $w = x^3y^2 + 3xz^2 + 4y^2z$

$$\frac{\delta w}{\delta x} = 3x^2y^2 + 3z^2$$

$$\frac{\delta w}{\delta y} = 2x^2y + 8xy$$

$$\frac{\delta w}{\delta z} = 6xz + 4y^2$$

5. $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

$$z = \ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right) (2x)$$

$$= \frac{1}{x^2 + y^2} (x)$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \right) (2y)$$

$$= \frac{1}{x^2 + y^2} (y)$$

$$= \frac{y}{x^2 + y^2}$$

6. $z = 2x + \frac{y}{x}$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 2 + (-1) \frac{y}{x^2} = 2 - \frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{1}{x}$$



7. Jika $u = \frac{xz+y^2}{yz}$ buktikan bahwa

$$x \frac{\delta u}{\delta x} + y \frac{\delta u}{\delta y} + z \frac{\delta u}{\delta z} = 0$$

Jawab:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{z}{yz} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{2y(yz) - z(xz + y^2)}{(yz)^2} = \frac{2y(yz) - uyz^2}{(yz)^2} = \frac{2y - uz}{yz}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta u}{\delta z} &= \frac{x(yz) - z(xz + y^2)}{(yz)^2} = \frac{x - uz}{yz} \\ x \frac{\delta u}{\delta x} + y \frac{\delta u}{\delta y} + z \frac{\delta u}{\delta z} &= x \frac{1}{y} + y \frac{2y - uz}{yz} + z \frac{x - uz}{yz} \\ &= \frac{1}{yz} (xz + 2y^2 - uyz + xz - uyz) \\ &= \frac{1}{yz} (xz + 2y^2 - uyz + xz - uyz) \\ &= \frac{1}{yz} (2uyz - 2uyz) \\ &= 0\end{aligned}$$

3. Ringkasan Bab

- Turunan parsial digunakan untuk fungsi dari beberapa variabel.
- Turunan parsial pertama menghitung perubahan relatif terhadap satu variabel.
- Turunan parsial kedua berguna dalam analisis kurvatur dan optimisasi.
- Diferensial total menyatakan perubahan kecil pada fungsi sebagai kombinasi perubahan variabel bebas.

Latihan Soal

1. Jelaskan dengan kata-kata Anda sendiri apa yang dimaksud dengan turunan parsial suatu fungsi dua variabel. Berikan satu contoh fungsi dan tunjukkan

bagaimana Anda menghitung turunan parsial terhadap masing-masing variabel.

2. Diberikan fungsi $f(x,y) = x^2 y + \sin(xy)$.
 - a. Hitung turunan parsial pertama terhadap x dan y .
 - b. Hitung turunan parsial kedua terhadap x dan y .
 - c. Jelaskan makna dari hasil turunan parsial tersebut dalam konteks perubahan fungsi terhadap variabelnya.
3. Suhu pada suatu permukaan diberikan oleh fungsi $T(x, y) = 100 - x^2 - y^2$, dengan x dan y dalam meter, dan T dalam derajat Celsius.
 - a. Tentukan turunan parsial pertama dari T terhadap x dan y .
 - b. Apa arti fisik dari turunan parsial tersebut pada titik $(3, 4)$?
 - c. Dalam arah manakah perubahan suhu paling cepat terjadi pada titik tersebut?

B. Fungsi Majemuk

Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Memahami konsep fungsi majemuk dalam kalkulus multivariabel.

2. Menerapkan aturan rantai untuk menghitung turunan parsial dari fungsi majemuk.
3. Mengidentifikasi variabel antara dan hubungan antar variabel dalam suatu komposisi fungsi.

1. Pengantar Konseptual

Dalam kalkulus multivariabel, kita sering menemui fungsi yang bukan hanya tergantung langsung pada variabel bebas, tetapi juga melalui fungsi lain yang disebut variabel antara. Untuk menganalisis perubahan nilai fungsi terhadap variabel-variabel tersebut, digunakan aturan rantai (*chain rule*). Topik ini penting karena banyak fenomena fisik, ekonomi, dan rekayasa dijelaskan oleh hubungan kompleks antar variabel.

2. Uraian Materi

Diferensial Parsial Fungsi Majemuk

a. $x = r \cdot \cos \theta$

$$y = r \cdot \sin \theta$$

Tentukanlah diferensial parsial

$$\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta} \text{ dari};$$

Penyelesaian:

- 1) Turunkan ke $x \rightarrow y$ dianggap konstan

$$1 = \frac{\partial r}{\partial x} \cos \theta + r (-\sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial r}$$

$$0 = \frac{\partial r}{\partial x} \sin \theta + r (\cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$u \cdot v = u'v + uv'$$

Menentukan $\frac{\partial r}{\partial x}$ dan $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ dengan cara determinan

Metode Determinan

Jika ada 2 buah persamaan linear {

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \text{ maka}$$

$$0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Sehingga,

$$1 = \frac{\partial r}{\partial x} \cos \theta + r (-\sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial r}$$

$$a_1 = \cos \theta, b_1 = -r \sin \theta, c_1 = 1 \text{ dimana } x = \frac{\partial r}{\partial x} \text{ dan } y = \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial r}{\partial x} \sin \theta + r (\cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$a_1 = \sin \theta, b_1 = -r \cos \theta, c_1 = 0 \text{ dimana } x = \frac{\partial r}{\partial x} \text{ dan } y = \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Maka jelas untuk,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -r \sin \theta \\ 0 & r \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \sin \theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \sin \theta \end{vmatrix}} = \frac{-r \sin \theta \cdot 0 - r \cos \theta \cdot 1}{\cos \theta (r \cos \theta) - \sin \theta (-r \sin \theta)} \\
 &= \frac{r \cos \theta}{r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta} \\
 &= \frac{r \cos \theta}{r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \\
 &= \frac{r \cos \theta}{r(1)} \\
 &= \frac{r \cos \theta}{r} \\
 &= \cos \theta
 \end{aligned}$$

Ingat!
Identitas Trigonometri
 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\begin{vmatrix} \cos \theta & 1 \\ \sin \theta & 0 \\ \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix}} = \frac{\cos \theta \cdot 0 - \sin \theta \cdot 1}{\cos \theta (r \cos \theta) - \sin \theta (-r \sin \theta)} \\
 &= \frac{\sin \theta}{r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta} \\
 &= \frac{\sin \theta}{r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \\
 &= \frac{\sin \theta}{r(1)} \\
 &= \frac{\sin \theta}{r}
 \end{aligned}$$

2) Turunkan ke $y \rightarrow x$ dianggap konstan

$$0 = \frac{\partial r}{\partial y} \cos \theta + r(-\sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$1 = \frac{\partial r}{\partial y} \sin \theta + r(\cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

menentukan $\frac{\partial r}{\partial y}$ dan $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ dengan cara determinan

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & -r \sin \theta \\ 1 & r \cos \theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix}} = \frac{r \cos \theta \cdot 0 - (-r \sin \theta) \cdot 1}{\cos \theta (r \cos \theta) - \sin \theta (-r \sin \theta)} \\
 &= \frac{r \sin \theta}{r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta} \\
 &= \frac{r \sin \theta}{r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \\
 &= \frac{r \sin \theta}{r(1)} \\
 &= \frac{r \sin \theta}{r} \\
 &= \sin \theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\begin{vmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix}} = \frac{\cos \theta \cdot 1 - \sin \theta \cdot 0}{\cos \theta (r \cos \theta) - \sin \theta (-r \sin \theta)} \\
 &= \frac{\cos \theta}{r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta} \\
 &= \frac{\cos \theta}{r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \\
 &= \frac{\cos \theta}{r(1)} \\
 &= \frac{\cos \theta}{r}
 \end{aligned}$$

3) Turunkan ke $r \rightarrow \theta$ dianggap konstan

$$\frac{\partial x}{\partial r} = 1 \cdot \cos \theta + r(0) = \cos \theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = 1 \cdot \sin \theta + r(0) = \sin \theta$$

4) Turunkan ke $\theta \rightarrow r$ dianggap konstan

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = 0 \cdot \cos \theta + r (-\sin \theta) = -r \sin \theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = 0 \cdot \sin \theta + r (\cos \theta) = r \cos \theta$$

$$\text{Jadi, } \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

b. $x = r \sec \theta$

$$x = r \sec \theta$$

Penyelesaian:

$$x - r \sec \theta = 0$$

$$y - r \tan \theta = 0$$

Langkah 1

- Fungsi diturunkan ke $x \rightarrow y$ dipandang sebagai konstan.

$$1 = \frac{\partial r}{\partial x} \sec \theta + r \sec \theta \times \tan \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial r}{\partial x} \tan \theta + r \sec^2 \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r \sec \theta \tan \theta \\ 0 & r \sec^2 \theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sec \theta & r \sec \theta \tan \theta \\ \tan \theta & r \sec^2 \theta \end{vmatrix}} = \frac{r \sec^2 \theta}{r \sec^2 \theta (r \cos \theta) - r \sec \theta \tan^2 \theta} = \sec \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \sec \theta & 1 \\ \tan \theta & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sec \theta & r \sec \theta \tan \theta \\ \tan \theta & r \sec^2 \theta \end{vmatrix}} = \frac{-\tan \theta}{-r \sec \theta} = -\frac{\sin \theta}{r}$$

Langkah 2

- Fungsi diturunkan ke $y \rightarrow x$ dipandang sebagai konstan.

$$0 = \frac{\partial r}{\partial y} \sec \theta + r \sec \theta \tan \theta \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$1 = \frac{\partial r}{\partial y} \tan \theta + r \sec^2 \theta \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & r \sec \theta \tan \theta \\ 1 & r \sec^2 \theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sec \theta & r \sec \theta \tan \theta \\ \tan \theta & r \sec^2 \theta \end{vmatrix}} = \frac{-r \sec \theta}{r \sec \theta} = -\tan \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} \sec \theta & 0 \\ \tan \theta & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sec \theta & r \sec \theta \tan \theta \\ \tan \theta & r \sec^2 \theta \end{vmatrix}} = \frac{\sec \theta}{r \sec \theta} = -\frac{1}{r}$$

- Fungsi diturunkan ke $\theta \rightarrow r$ dipandang sebagai konstan.

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = r \sec \theta \tan \theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \sec^2 \theta$$

Langkah 3

- Fungsi diturunkan ke $r \rightarrow x\theta$ dipandang sebagai konstan.

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sec \theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \tan \theta$$

3. Ringkasan Bab

- Fungsi majemuk adalah komposisi dari fungsi-fungsi.
- Aturan rantai digunakan untuk menghitung turunan fungsi majemuk.
- Turunan parsial dari fungsi majemuk dihitung dengan menjumlahkan hasil turunan setiap jalur variabel.

Latihan Soal

1. Diketahui fungsi: $z = x \sin(y)$, dengan $x = e^t$ dan $y = t^2$.
Hitunglah turunan total dari z terhadap t , yaitu: dz/dt .
2. Diketahui fungsi:
 $z = x^2 + y^2$, dengan $x = u^2 - v^2$ dan $y = 2uv$.
Hitunglah turunan parsial: $\partial z/\partial u$ dan $\partial z/\partial v$.
3. Buktikan bahwa jika:
 $z = f(x, y)$, $x = r \cos(\theta)$, dan $y = r \sin(\theta)$,
maka berlaku:
$$\partial z/\partial r = \partial z/\partial x \cdot \cos(\theta) + \partial z/\partial y \cdot \sin(\theta).$$

BAB 3

PERSAMAAN BIDANG SINGGUNG DAN GARIS NORMAL

A. Persamaan Bidang Singgung

Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, siswa diharapkan mampu:

1. Menjelaskan konsep bidang singgung dan garis normal pada permukaan 3 dimensi.
2. Menurunkan persamaan bidang singgung pada kurva dan permukaan.
3. Menentukan persamaan garis normal pada kurva dan permukaan.
4. Menerapkan konsep bidang singgung dan garis normal dalam menyelesaikan masalah kalkulus lanjut.

1. Pengantar Konseptual

Dalam kalkulus lanjut, pembahasan mengenai bidang singgung dan garis normal sangat penting untuk memahami sifat lokal sebuah permukaan atau kurva di ruang tiga dimensi. Bidang singgung adalah bidang yang tepat menyentuh permukaan di satu titik tertentu dan

mempunyai arah yang sesuai dengan turunan permukaan tersebut. Sedangkan garis normal adalah garis yang tegak lurus terhadap bidang singgung dan menunjukkan arah “normal” atau tegak lurus terhadap permukaan di titik tersebut.

Pemahaman konsep ini sangat berguna dalam berbagai aplikasi, misalnya dalam mekanika, fisika, dan rekayasa, untuk menentukan arah gaya, refleksi, serta analisis bentuk geometris.

2. Uraian Materi

Rumus-rumus yang digunakan:

Bila luasan $z = f(x, y)$ dan Titik $P = (x_1, y_1, z_1)$

Persamaan bidang singgung melalui titik $P (x_1, y_1, z_1)$ pada luasan $z = f(x, y)$ dapat ditentukan dengan rumus :

$$z - z_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_P (x - x_1) + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_P (y - y_1)$$

Dimana koefisien arah dari persamaan bidang singgung ini adalah:

$$\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_P ; \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_P ; -1 \right]$$

Sedangkan persamaan garis normal melalui $P (x_1, y_1, z_1)$ pada luasan $z = f(x, y)$

$$\frac{(x - x_1)}{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_P} = \frac{(y - y_1)}{\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_P} = \frac{(z - z_1)}{-1}$$

3. Contoh Soal

- 1) Tentukan persamaan bidang singgung dan garis normal pada luasan:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 38 \text{ di titik } P(5, 2, 3)$$

Penyelesaian:

Pertama-tama fungsi luasa dirubah kedalam bentuk:

$$z = \sqrt{38 - x^2 - y^2}$$

Kemudian tentukan turunan parsial dari z ke x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{38 - x^2 - y^2}}$$

Selanjutnya substitusi titik P (nilai x dan nilai y)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = \frac{-5}{\sqrt{38 - 5^2 - 2^2}}$$

Diperoleh nilai

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = \frac{-5}{\sqrt{38 - 25 - 4}} = -\frac{5}{\sqrt{9}} = -\frac{5}{3}$$

Kemudian tentukan turunan parsial dari z ke y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{38 - x^2 - y^2}}$$

Selanjutnya substitusi titik P (nilai x dan nilai y)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = \frac{-2}{\sqrt{38 - 5^2 - 2^2}}$$

Diperoleh nilai

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = \frac{-2}{\sqrt{38 - 25 - 4}} = -\frac{2}{\sqrt{9}} = -\frac{2}{3}$$

Sehingga diperoleh Koefisien Arah dari luasan:

$$\left\{-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, -1\right\}$$

Selanjutnya Persamaan Bidang Singgung dengan Luasan z melalui titik $P(5,2,3)$ dapat ditentukan dengan menggunakan rumus :

$$z - z_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P (x - x_1) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P (y - y_1)$$

$$z - 3 = -\frac{5}{3}(x - 5) - \frac{2}{3}(y - 2)$$

$$3z + 5x + 2y = 38$$

B. Persamaan Garis Normal

Demikian pula Persamaan Garis Normal luasan z melalui titik $P(5,2,3)$ dapat ditentukan dengan menggunakan rumus:

$$\frac{(x - x_1)}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P} = \frac{(y - y_1)}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P} = \frac{(z - z_1)}{-1}$$

$$\frac{(x - 5)}{-\frac{5}{3}} = \frac{(y - 2)}{-\frac{2}{3}} = \frac{(z - 3)}{-1}$$

Selanjutnya disederhanakan dan diperoleh bentuk persamaan garis normal:

$$6(x - 5) = 15(y - 2) = 10(z - 3)$$

Contoh soal:

- 1) Tentukan persamaan bidang singgung dan garis normal pada luasan: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 1$ di titik $P(-2, 2, 1)$

Penyelesaian:

Pertama-tama luasan tersebut dirubah ke dalam bentuk fungsi z

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 1$$

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 16$$

Sehingga diperoleh bentuk:

$$z = \frac{1}{2} \sqrt{16 - x^2 - 2y^2}$$



Kemudian tentukan turunan parsial dari z ke x, diperoleh bentuk:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{16 - x^2 - 2y^2}} = \frac{-x}{4z}$$

Selanjutnya substitusi titik $P(-2, 2, 1)$, diperoleh hasil:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_P = \frac{2}{4 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

Kemudian tentukan turunan parsial dari z ke y , diperoleh bentuk:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-4y}{\sqrt{16 - x^2 - 2y^2}} = \frac{-y}{2z}$$

Selanjutnya substitusi titik $P(-2, 2, 1)$, diperoleh hasil:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$$

Sehingga Koefisien Arah dari luasan tersebut: $\left\{\frac{1}{2}, -1, -1\right\}$

Persamaan Bidang Singgung luasan z melalui titik $P(-2, 2, 1)$ dapat ditentukan dengan menggunakan rumus:

$$z - z_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P (x - x_1) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P (y - y_1)$$

$$z - 1 = \frac{1}{2}(x + 2) - \frac{1}{2}(y - 2)$$

Selanjutnya disederhanakan, sehingga diperoleh bentuk Persamaan Bidang Singgung:

$$-x + 2y + 2z = 8$$

Sedangkan Persamaan Garis Normal luasan z melalui titik $P(-2, 2, 1)$ dapat ditentukan dengan menggunakan rumus:

$$\frac{(x - x_1)}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P} = \frac{(y - y_1)}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P} = \frac{(z - z_1)}{-1}$$

Diperoleh bentuk persamaan Garis Normal:

$$\frac{2(x+2)}{1} = \frac{(y-2)}{-1} = \frac{(z-1)}{-1}$$

- 2) Tentukanlah Persamaan Bidang Singgung dan Garis Normal pada paraboloida $x^2 + y^2 - z^2 = 18$ di titik $P(3, 5, -4)$.

Penyelesaian:

Pertama-tama luasannya dirubah ke dalam bentuk z

$$x^2 + y^2 - z^2 = 18$$

$$z^2 = x^2 + y^2 - 18$$

$$z = (x^2 + y^2 - z^2 = 18)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2 - z^2 = 18)^{-\frac{1}{2}} (2x) = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 - z^2 = 18)}}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 5^2 - 18}} = \frac{3}{\sqrt{9 + 25 - 18}} = \frac{3}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2 - z^2 = 18)^{-\frac{1}{2}} (2y) = \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 - z^2 = 18)}}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = \frac{5}{\sqrt{3^2 + 5^2 - 18}} = \frac{5}{\sqrt{9 + 25 - 18}} = \frac{5}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$$

$$\text{Koefisien Arahanya } \left\{ \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, -1 \right\}$$

Persamaan Garis Singgung

$$z - z_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P (x - x_1) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P (y - y_1)$$

$$(z + 4) = \frac{3}{4}(x - 3) - \frac{5}{4}(y - 5)$$

$$4(z + 4) = 3(x - 3) + 5(y - 5)$$

$$4z + 16 = 3x - 9 + 5y - 25$$

$$3x + 5y - 4z - 16 - 34 = 0$$

$$3x + 5y + 4z = 50$$

Persamaan Garis Normal

$$\frac{(x - x_1)}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p} = \frac{(y - y_1)}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p} = \frac{(z - z_1)}{-1}$$

$$\frac{(x - 3)}{\frac{3}{4}} = \frac{(y - 5)}{\frac{5}{4}} = \frac{(z - z_1)}{-1}$$

$$20(x - 3) = 12(y - 5) = -15(z + 4)$$

3) Tentukan persamaan bidang singgung dan persamaan garis normal dari luasan $x^2y^2 + 4x^2y = z$ di titik $Q(-1, 2, 2)$

Penyelesaian:

$$z = x^2y^2 + 4x^2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + 8xy$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_Q = 2(-1) \cdot (2)^2 + 8(-1) \cdot (2)$$

$$= -8 - 16$$

$$= -24$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y + 4x^2$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_Q = 2(-1)^2 \cdot (2) + 4(-1)^2$$

$$= 4 + 4$$

$$= 8$$

Koefisien Arah $\{-24, 8, -1\}$

Persamaan Bidang Singgung:

$$z - z_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P (x - x_1) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P (y - y_1)$$

$$z - 2 = -24(x + 1) + 8(y - 2)$$

$$z - 2 = -24x - 24 + 8y - 16$$

$$24x - 8y + z = -24 - 16 + 2$$

$$24x - 8y + z = -38$$

Persamaan Garis Normal:

$$\frac{(x - x_1)}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_Q} = \frac{(y - y_1)}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_Q} = \frac{(z - z_1)}{-1}$$

$$\frac{x + 1}{-24} = \frac{y - 2}{8} = \frac{z - 2}{-1}$$

- 4) Tentukan persamaan bidang singgung dan persamaan garis normal dari luasan $z = 3x^2 - x^2y^2 + y^2$ di titik $C(2, 2, 4)$

Penyelesaian:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6x - 2xy^2$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_C = 6(2) - 2(2) \cdot (2)^2$$

$$= 12 - 16$$

$$= -4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2x^2y + 2y$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_C = -2(2)^2 \cdot (2) + 2(2)$$

$$= -16 + 4$$

$$= -12$$

Koefisien Arah: $\{-4, -12, -1\}$

Persamaan Bidang Singgung:

$$z - z_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_C (x - x_1) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_C (y - y_1)$$

$$z - 4 = -4(x - 2) + (-12)(y - 2)$$

$$z - 4 = -4x + 8 - 12y + 24$$

$$4x + 12y + z = 8 + 24 + 4$$

$$4x + 12y + z = 36$$

Persamaan Garis Normal

$$\frac{(x - x_1)}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_c} = \frac{(y - y_1)}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_c} = \frac{(z - z_1)}{-1}$$

$$\frac{(x - 2)}{-4} = \frac{(y - 2)}{-12} = \frac{(z - 4)}{-1}$$

- 5) Tentukan persamaan bidang singgung dan persamaan garis normal dari luasan $Z = \arctan x^2 + y^2$ di titik $A(2, 1, 2)$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^2} \cdot 2x \\ &= \frac{2x}{1 + (x^4 + 2x^2y^2 + 4y^4)} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A = \frac{2(2)}{1 + ((2)^4 + 2(2)^2(1)^2 + (1)^4)}$$

$$= \frac{4}{1 + 16 + 8 + 1}$$

$$= \frac{4}{26} = \frac{2}{13}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^2} \cdot 2y$$

$$= \frac{2y}{1 + (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)}$$



$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A &= \frac{2(1)}{1 + ((2)^4 + 2(2)^2(1)^2 + (1)^4)} \\&= \frac{2}{1 + 16 + 8 + 1} \\&= \frac{2}{26} = \frac{1}{13}\end{aligned}$$

Koefisien Arah: $\left\{\frac{2}{13}, \frac{1}{13}, -1\right\}$

Persamaan Bidang Singgung:

$$z - z_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A (x - x_1) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A (y - y_1)$$

$$z - 2 = \frac{2}{13}(x - 2) + \frac{1}{13}(y - 1)$$

$$z - 2 = \frac{2}{13}x - \frac{4}{13} + \frac{1}{13}y - \frac{1}{13} \dots (\times 13)$$

$$= 13(z - 2) = 2x - 4 + y - 1$$

$$= 13z - 26 = 2x - 4 + y - 1$$

$$= -2x - y + 13z = -4 - 1 + 26 \dots (\times -1)$$

$$= 2x + y - 13z = -21$$

Persamaan Garis Normal

$$\frac{(x - x_1)}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A} = \frac{(y - y_1)}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A} = \frac{(z - z_1)}{-1}$$

$$\frac{x-2}{\frac{2}{13}} = \frac{y-1}{\frac{1}{13}} = \frac{z-2}{-1}$$

$$\frac{13(x-2)}{2} = \frac{13(y-1)}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

$$13(x-2) = 26(y-1) = -2(z-2)$$

Latihan Soal

1. Diberikan permukaan: $x^2 + y^2 - z$

Tentukan persamaan bidang singgung dan garis normal pada titik: $P(1, -1, 2)$ $P(1, -1, 2)$.

2. Kurva parametrik $r(t) = (t^3, \sin t)$ $r(t) = (t, t^3, \sin t)$. Tentukan persamaan bidang singgung pada titik $t = 0$

3. Tentukan persamaan bidang singgung dan garis normal pada permukaan:

$$z = x^2 + y^2 \text{ di titik } (1, 2, 5) \text{ } (1, 2, 5).$$

4. Permukaan $F(x, y, z) = xyz - 1$. Tentukan persamaan bidang singgung pada titik $P(1, 1, 1)$ $P(1, 1, 1)$.

BAB 4

DIFERENSIAL TOTAL

A. Orde Satu Fungsi Tunggal

Capaian Pembelajaran Bab

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan pengertian diferensial total orde satu dari fungsi tunggal.
2. Menurunkan bentuk diferensial total orde satu dari fungsi satu variabel.
3. Menerapkan konsep diferensial total dalam penyelesaian masalah estimasi perubahan nilai fungsi.
4. Mengintegrasikan pemahaman diferensial dalam konteks yang lebih luas pada kalkulus multivariat.

1. Pengantar Konseptual

Dalam kalkulus lanjut, konsep diferensial tidak hanya mencakup perubahan nilai fungsi terhadap satu variabel, tetapi juga bagaimana fungsi berubah secara lokal terhadap perubahan kecil pada variabel tersebut. Diferensial total memberikan pendekatan linear terhadap perubahan fungsi, dan sangat berguna untuk memperkirakan nilai fungsi ketika perubahan variabelnya kecil. Dalam konteks fungsi tunggal, diferensial total orde satu memberikan gambaran

bagaimana nilai fungsi berubah berdasarkan turunan pertama dari variabel bebasnya.

2. Uraian Materi

Bila fungsi $z=f(x,y)$, maka diferensial totalnya dituliskan:

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy$$

Bila fungsi $w=f(x,y,z)$, maka diferensial totalnya dituliskan:

$$dw = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) dz$$

Bila fungsi $s=f(p_1, p_2, p_3, \dots)$ maka diferensial totalnya dituliskan:

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial p_1}\right) dp_1 + \left(\frac{\partial s}{\partial p_2}\right) dp_2 + \left(\frac{\partial s}{\partial p_3}\right) dp_3 + \dots + \left(\frac{\partial s}{\partial p_n}\right) dp_n$$

Contoh:

Tentukan diferensial total fungsi berikut:

a. $z = xy^2 + 3x^2y$

Jawab:

$$z = xy^2 + 3x^2y$$

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy$$

$$= (y^2 + 6xy)dx + (2xy + 3x^2)dy$$

b. $p = \ln xy^2z$

Jawab:

$$p = \ln xy^2 z$$

$$\begin{aligned} dp &= \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) dz \\ &= \frac{1}{xy^2 z} (y^2 z) dx + \frac{1}{xy^2} (2xyz) dy + \frac{1}{xy^2 z} (xy^2) dz \\ &= \left(\frac{1}{x} \right) dx + \left(\frac{2}{y} \right) dy + \left(\frac{1}{z} \right) dz \end{aligned}$$

c. $u = e^{x^2} + 3t$

Jawab:

$$u = e^{x^2} + 3t$$

$$\begin{aligned} du &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dt \\ &= (xe^{x^2}) dx + (3) dt \end{aligned}$$

3. Ringkasan Bab

- Diferensial total orde satu menggambarkan perubahan linear fungsi terhadap perubahan kecil inputnya.
- Rumus dasar: $df = f'(x) dx$
- Digunakan untuk pendekatan nilai fungsi, analisis kesalahan, dan estimasi lokal.
- Aplikasi luas dalam sains dan teknik terutama ketika fungsi tidak dapat dihitung secara eksak.

Latihan Soal

Tentukan diferensial total dari fungsi-fungsi berikut;

1. $z = 5^{z^2 y + x}$

2. $z = \arccos \frac{x}{y^2}$

3. $u = \sqrt{xyz} \quad \rightarrow uu = xyz^{\frac{1}{2}}$

4. $z = 6xy^2 + 2x^3y$

5. $z = e^x - e^{-y}$

6. $w = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$

7. $z = e^{e^{x+y}}$

8. $z = \frac{x^{-\frac{1}{y}}}{y^{-\frac{1}{x}}} = \frac{\frac{xy}{y} \cdot \frac{1}{y}}{\frac{xy}{x} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x-1}{y}}{\frac{xy-1}{x}} = \frac{x(xy-1)}{y(xy-1)} = \frac{x^2 y - x}{xy^2 - y}$

9. $z = \sin(x \ln|y|)$

Tentukan diferensial total dari fungsi-fungsi berikut;

10. $z = 5^{z^2 y + x}$

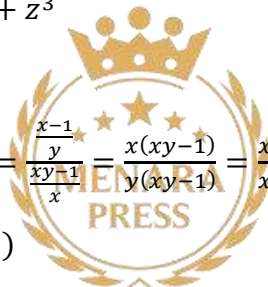
11. $z = \arccos \frac{x}{y^2}$

12. $u = \sqrt{xyz} \quad \rightarrow uu = xyz^{\frac{1}{2}}$

13. $z = 6xy^2 + 2x^3y$

14. $z = e^x - e^{-y}$

15. $w = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$



$$16. z = e^{e^{x+y}}$$

$$17. z = \frac{x - \frac{1}{y}}{y - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{xy - 1}{y}}{\frac{xy - 1}{x}} = \frac{\frac{x-1}{y}}{\frac{xy-1}{x}} = \frac{x(xy-1)}{y(xy-1)} = \frac{x^2y-x}{xy^2-y}$$

$$18. z = \sin(x \cdot \ln|y|)$$

B. Orde Satu Fungsi Majemuk

Capaian Pembelajaran

1. Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa mampu:
Menjelaskan konsep fungsi majemuk dalam kalkulus multivariabel.
2. Menurunkan bentuk diferensial total dari fungsi majemuk.
3. Menerapkan aturan rantai (*chain rule*) dalam menghitung diferensial total.
4. Menggunakan diferensial total untuk mendekati perubahan nilai fungsi majemuk.

1. Pengantar Konseptual

Dalam kalkulus lanjut, banyak fungsi yang bergantung pada lebih dari satu variabel, dan kadang fungsi tersebut merupakan komposisi dari beberapa fungsi lainnya. Diferensial total fungsi majemuk digunakan untuk menghitung perubahan nilai suatu fungsi terhadap perubahan kecil pada beberapa variabel yang saling bergantung. Konsep ini penting dalam memahami hubungan

antar variabel dan peran aturan rantai dalam proses diferensiasi.

2. Uraian Materi

Diferensial total fungsi majemuk merupakan penurunan menyeluruh dari suatu fungsi yang diwakili oleh beberapa fungsi. Ada beberapa bentuk turunan sebelumnya yang harus dipahami untuk menyelesaikan permasalahan diferensial ini, yaitu $\frac{dy}{dx}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Jika kita memiliki $y = f(x)$, maka dapat ditentukan $\frac{dy}{dx}$ yang berarti turunan y terhadap x . Dan jika kita memilih $Z = f(x, y)$ yang berarti suatu fungsi Z terdiri atas dua variabel yakni x dan y , maka dapat ditentukan $\frac{dz}{dx}$, dan $\frac{dz}{dy}$. $\frac{dz}{dy}$ memiliki arti bahwa suatu fungsi Z diturunkan terhadap x dan y sebagai konstanta. Begitupun sebaliknya, $\frac{dz}{dx}$ memiliki arti bahwa suatu fungsi Z diturunkan terhadap y dengan x sebagai konstanta.

Berikut beberapa bentuk dari Diferensial total fungsi majemuk.

Jika:

$$\left. \begin{array}{l} Z = f(x, y) \\ y = g(x) \end{array} \right\} Z = F(x)$$

Jika kita memiliki dua fungsi seperti diatas, dan variabel y pada fungsi Z digantikan dengan nilai dari suatu

fungsi y dalam x , maka sebenarnya fungsi Z adalah suatu fungsi dalam x .

Diferensial totalnya dituliskan:

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

Atau kemudian bisa diselesaikan dengan metode lain yaitu dengan cara melakukan substitusi nilai fungsi ke dalam variabel dahulu. Kemudian berikutnya baru dilakukan penurunan.

Jika:

$$\left. \begin{array}{l} Z = f(x, y) \\ x = g(t) \\ y = h(t) \end{array} \right\} Z = f(t)$$

Diferensial totalnya dapat dituliskan:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

Jika:

$$\left. \begin{array}{l} Z = f(x, y) \\ x = g(r, s) \\ y = h(r, s) \end{array} \right\} Z = f(r, s)$$

Diferensial totalnya dapat dituliskan:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

3. Contoh Soal:

1) Tentukanlah diferensial total jika diketahui

$$Z = xy^2$$

$$y = 2x$$

Jawab:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2$$

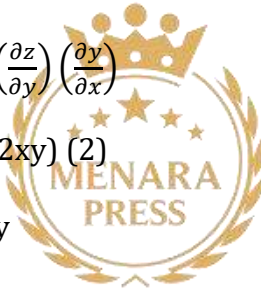
Sehingga;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y^2) + (2xy) (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 + 4xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y (y + 4x)$$



2) Tentukanlah diferensial total jika diketahui

$$Z = xy^2 + x^2y$$

$$x = t$$

$$y = 2t$$

Jawab:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 + 2xy \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + x$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 1 \text{ dan } \frac{\partial y}{\partial t} = 2$$

Sehingga;

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (y^2 + 2xy) + (4xy + 2x)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = y^2 + 6xy + 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (2t)^2 + 6(t)(2t) + 2(t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 4t^2 + 12t^2 + 2t$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 16t^2 + 2t$$

3) Diketahui:

$$Z = \frac{1}{3}yx^3 + \frac{1}{3}xy^3$$

$$x = r - s$$

$$y = r + s$$

Tentukan:

$$\frac{\partial z}{\partial r} \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial s}$$

Jawab:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = yx^2 \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial y} = xy^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = 1 \text{ dan } \frac{\partial x}{\partial r} = 1$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -1 \text{ dan } \frac{\partial y}{\partial s} = 1$$

Sehingga,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = (yx^2)(1) + (xy^2)(1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = (yx^2) + (xy^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = (r-s)(r+s)^2 + (r+s)(r-s)^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = (r-s)(r^2 + 2rs + s^2) + (r+s)(r-s)^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = (r-s)(r^2 + 2rs + s^2) + (r+s)(r^2 + 2rs + s^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = (r^3 + r^2s - rs^2 - s^3) + (r^3 - r^2s - rs^2 + s^3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 2r^3 - 2rs^2$$

Dan,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = (yx^2)(-1) + (xy^2)(-1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = yx^2 - xy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = (r+s)(r-s)^2 + (r+s)(r-s)^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = (r-s)(r^2 - 2rs + s^2) - (r+s)(r-s)^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = (r+s)(r^2 - 2rs + s^2) - (r-s)(r^2 + 2rs + s^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = (r^3 - r^2s - rs^2 + s^3) - (r^3 + r^2s - rs^2 - s^3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2s^3 - 2r^2s$$

4) Tentukan diferensial total jika diketahui

$$Z = xy^2$$

$$y = 2x$$

Jawab:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \text{ dan, } \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = 2$$

Sehingga;

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dz}{dx} = (y^2) + (2xy)(2)$$

$$\frac{dz}{dx} = y^2 + 4xy$$

$$\frac{dz}{dx} = y(y + 4x)$$

5) Tentukan diferensial total jika diketahui

$$z = xy^2 + x^2y$$

$$x = t$$

$$y = 2t$$

Jawab:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 + 2xy, \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + x$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ dan } \frac{dy}{dt} = 2$$

Sehingga;

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{dz}{dt} = (y^2 + 2xy)(1) + (2xy + x)(2)$$

$$\frac{dz}{dt} = (y^2 + 2xy) + (4xy + 2x)$$

$$\frac{dz}{dt} = y^2 + 6xy + 2x$$

$$\frac{dz}{dt} = (2t)^2 + 6(t)(2t) + 2(t)$$

$$\frac{dz}{dt} = 4t^2 + 12t^2 + 2t$$



$$\frac{dz}{dt} = 16t^2 + 2t$$

6) Diketahui:

$$Z = \frac{1}{3}yx^3 + \frac{1}{3}xy^3$$

$$x = r - s$$

$$y = r + s$$

Tentukan:

$$\frac{\partial z}{\partial r} \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial s}$$

Jawab:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^2 \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial y} = xy^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = 1 \text{ dan } \frac{\partial y}{\partial r} = 1$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -1 \text{ dan } \frac{\partial y}{\partial s} = 1$$

Sehingga;

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dr}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dr}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = (yx^2)(1) + (xy^2)(1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = (yx^2) + (xy^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = (r-s)(r+s)^2 + (r+s)(r-s)^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = (r-s)(r^2 + 2rs + s^2) + (r+s)(r^2 - 2rs + s^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = (r^3 + r^2s - rs^2 - s^3) + (r^3 - r^2s - rs^2 + s^3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 2r^3 - 2r^2s$$

Dan,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = (xy^2)(-1) + (xy^2)(1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = xy^2 - xy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = (r+s)(r-s)^2 - (r+s)(r-s)^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = (r+s)(r^2 - 2rs + s^2) - (r+s)(r^2 - 2rs + s^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = (r^3 - r^2s - rs^2 + s^3) - (r^3 + r^2s - rs^2 - s^3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2s^3 - 2r^2s$$

4. Ringkasan Bab

- Fungsi majemuk melibatkan komposisi dari beberapa fungsi.

- Diferensial total fungsi majemuk menggunakan aturan rantai untuk menurunkan perubahan nilai fungsi terhadap variabel bebas.
- Aplikasi dalam estimasi perubahan fungsi multivariabel.

Latihan Soal

Tentukan diferensial total fungsi majemuk berikut:

1. $w = 2x^2 - xyz + 5$

$$x = 5t$$

$$y = t^2$$

2. $w = \sin (x+y)$

$$x = e^{s^2}$$

$$y = e^{t^2}$$

3. $w = x - y^2 - z^3$

$$x = sr + st^2$$

$$y = rst + s^2$$

$$z = e^{(t-s)} - srt$$

$$u = r^2 + s^2 + t^2$$

4. $z = \frac{x+y}{x-y}$

$$\left. \begin{array}{l} x = 6t \\ y = 2t^2 \end{array} \right\} z = f(t)$$

5. $w = e^{x^2+y^2+z^2}$

$$\left. \begin{array}{l} x = \sin t \\ y = \cos t \\ z = \tan t \end{array} \right\} w = f(t)$$

6. $w = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

$$x = \arctan \frac{r}{s}$$

$$y = 4r^2s + 3rs^3$$

7. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial s}$ dari fungsi fungsi berikut :

a. $z = 10^{x^2+y^2}$

$$x = \ln e^{s+r}$$

$$y = (s+r) \ln e^{s-r}$$

b. $z = x^2 + y^2$

$$x = \ln e^{(s^2 - r^2)}$$

$$y = (s^2 + r^2) \ln e$$

8. Tentukan diferensial totalnya:

a. $xyz + xy^2 + zx^2$

$$\left. \begin{array}{l} x = \ln t \\ y = \operatorname{tg} t \end{array} \right\} z = f(t)$$



b. $u = \cos x^2 y^3$

$$\left. \begin{array}{l} x = s^2 e^t \\ y = t^2 e^{25} \end{array} \right\} u = f(s, t)$$

c. $u = 3y \cdot e^{-2x}$

$$\left. \begin{array}{l} x = \ln(2r + 2s + 2t) \\ y = \arctg(\sqrt{rst}) \end{array} \right\} u = f(r, s, t)$$

9. Tentukan dervatif total dari fungsi fungsi majemuk berikut:

a. $w = 2x^2 - xyz + 5$

$$x = 5t$$

$$y = t^2$$

b. $w = \sin(x + y)$

$$x = e^{s^2}$$

$$y = e^{t^2}$$

c. $w = x - y^2 - z^3$

$$x = sr + st^2$$

$$y = rst + s^2$$

$$z = e^{(t-s)} - srt$$

$$u = r^2 + s^2 + t^2$$

C. Orde Tinggi Fungsi Tunggal

Capaian Pembelajaran Bab

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan konsep diferensial total orde tinggi dari fungsi tunggal.
2. Menurunkan bentuk diferensial total orde dua dan lebih tinggi.
3. Membedakan antara diferensial orde pertama dan orde tinggi.
4. Menggunakan diferensial orde tinggi untuk analisis perubahan fungsi dalam pendekatan Taylor.

1. Pengantar Konseptual

Diferensial total orde pertama sering digunakan untuk memperkirakan perubahan nilai fungsi akibat perubahan kecil pada variabelnya. Namun, untuk pendekatan yang lebih akurat terutama saat perubahan variabel cukup besar, diferensial total orde tinggi menjadi penting. Konsep ini berkaitan erat dengan pengembangan deret Taylor dan digunakan untuk analisis kurva dan fungsi dalam berbagai aplikasi matematika lanjutan.

2. Uraian Materi

Misalkan $Z = f(x, y)$

$$\text{Diferensial total orde 1 } dz = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^1 f$$

$$\begin{aligned}\text{Diferensial total orde 2 } d^2z &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2\end{aligned}$$

Diferensial total orde 3:

$$\begin{aligned}d^3z &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial^2 \partial y} dy \partial x^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dy^2 dx + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3\end{aligned}$$

$$\text{Diferensial total orde n } d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f$$

3. Contoh Soal:

- a. Diketahui $z = e^{x^2+y^2}$. Tentukan d^2z

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}d^2z &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2\end{aligned}$$

$$z = e^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2xe^{x^2+y^2} (2 + 4x^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2ye^{x^2+y^2} (2 + 4y^2)$$

$$\begin{aligned}
 d^2z &= e^{x^2+y^2} (2 + 4x^2) dx^2 \\
 &= 2e^{x^2+y^2} (4xy) dydx + e^{x^2+y^2} (2 + 4y^2) dy^2 \\
 &= 2e^{x^2+y^2} \{ (1 + 2x^2) dx^2 + (4xy) dydx + (1 + 2y^2) dy^2 \}
 \end{aligned}$$

b. Diketahui $z = \ln\sqrt{x^3 + y^4}$

Tentukan: d^2z

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 d^2z &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z \\
 &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2
 \end{aligned}$$

$$Z = \ln\sqrt{x^3 + y^4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^3+y^4}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+y^4}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{x^3+y^4}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^3+y^4}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4y^3}{\sqrt{x^3+y^4}} = 2 \cdot \frac{y^3}{x^3+y^4}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{3}{2} \frac{2x(x^3+y^4) - x^2(3x^2)}{(x^3+y^4)^2} = -\frac{3}{2} \frac{3x^4 - 2xy^2}{(x^3+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \frac{3y^2(x^3+y^4) - y^2(4x^3)}{(x^3+y^4)^2} = -2 \frac{3x^3y^2 - y^6}{(x^3+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 \frac{0(x^3+y^4) - y^3(3x^3)}{(x^3+y^4)^2} = -6 \frac{x^2y^3}{(x^3+y^4)^2}$$

$$\partial^2 z = -\frac{3}{2} \frac{x^4 - 2y^4}{(x^3+y^4)^2} dx^2 - 12 \frac{x^2y^3}{(x^3+y^4)^2} dydx + \frac{3x^3y^2 - y^6}{(x^3+y^4)^2}$$

$$dy^2$$

c. Tentukan dz jika $z = \frac{x}{y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{y^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}$$

$$\partial z = \frac{y \partial x - x \partial y}{y^2}$$

$$d^2 z = \frac{-2}{y^2} \partial x \partial y + \frac{2x}{y^3} \partial y^2$$

4. Ringkasan Bab

- Diferensial total orde tinggi mencakup turunan kedua, ketiga, dan seterusnya.
- Berguna dalam pendekatan deret Taylor untuk memperkirakan nilai fungsi.
- Memberikan estimasi lebih akurat terhadap perubahan nilai fungsi.

Latihan Soal

1. Diketahui $f(x) = \cos(x)$. Hitung df , d^2f , dan d^3f di $x = 0$ dengan $dx = 0.1$.
2. Jika $f(x) = \ln(1 + x)$, tentukan df dan d^2f di $x = 0$ dengan $dx = 0.05$.
3. Diketahui $f(x) = \sin(x)$, hitung pendekatan $f(0.1)$ menggunakan deret Taylor sampai orde ketiga.

4. Jika $f(x) = x^3 - 3x + 2$, hitunglah d^2f dan d^3f di $x = 1$ untuk $dx = 0.2$.



BAB 5

INTEGRAL LIPAT

A. Integral Lipat Dua

Capaian Pembelajaran Bab

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Menjelaskan konsep integral lipat dua dan lipat tiga.
2. Menentukan daerah integrasi dan menyusun batas-batas integral.
3. Menghitung nilai integral lipat dua dan tiga pada berbagai bentuk daerah.
4. Menerapkan koordinat polar, silinder, dan bola dalam menyelesaikan integral lipat.
5. Menggunakan integral lipat dalam aplikasi nyata, seperti menghitung volume dan massa.

1. Pengantar Konseptual

Integral lipat merupakan bentuk perpanjangan dari integral satu variabel ke dua atau lebih variabel. Jika integral satu variabel digunakan untuk menghitung luas di bawah kurva, maka integral dua variabel digunakan untuk menghitung

volume di bawah permukaan, dan integral tiga variabel menghitung volume dalam ruang tiga dimensi.

Konsep ini sangat penting dalam berbagai bidang ilmu seperti fisika, teknik, ekonomi, dan statistik, di mana kita perlu menghitung nilai total dari fungsi yang tergantung pada lebih dari satu variabel.

2. Uraian Materi

Integral Lipat Dua

Pengertian integral lipat dua ditulis dalam bentuk:

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx dy$$

Ilah pengintegralan pertama dilakukan terhadap x dengan memandang $f(x, y)$ sebagai fungsi dari x , dan y dianggap tetap (konstan), sedang batas integral yaitu $x_1(y)$ ke $x_2(y)$, kemudian hasil pengintegralan pertama diintegrasikan terhadap y dengan batas integrase dari y_1 ke y_2 .

Bila integral diberikan dalam bentuk:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx$$

Maka pengintegralan pertama dilakukan terhadap y dengan batas $y_1(x)$ ke $y_2(x)$, kemudian hasilnya diintegrasikan terhadap x dengan batas x_1 ke x_2 , kemudian

hasilnya diintegrasikan kembali terhadap y , dengan batas c sampai.

Contoh:

Hitung integral lipat dua berikut:

a. $\int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2) dy dx$

Jawab:

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 xy - y^3 \Big|_1^2 dx \\ &= \int_0^2 (2x - 2^3) - (x - 1^3) dx \\ &= \int_0^2 (2x - 8) - (x - 1) dx \\ &= \int_0^2 (x - 7) dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 - 7x \right) \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{2}2^2 - 7 \cdot 2 - 0 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 - 14 \\ &= 2 - 14 \\ &= -12 \end{aligned}$$

b. $\int_1^2 \int_0^1 (xy^2) dy dx$

Jawab:

$$= \int_1^2 \frac{1}{3}xy^3 \Big|_0^1 dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{3} x 1^2 - 0 \, dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{3} x \, dx$$

$$= \frac{1}{6} x^2 \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{6} 2^2 - \frac{1}{6} 1^2$$

$$= \frac{4}{6} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{3}{6} \text{ atau } \frac{1}{2}$$

c. $\int_{-4}^2 \int_{x^2+4}^x (2x^2 - 3y^2) dy dx$

$$= \int_{-4}^2 (2x^2 y - y^3) \Big|_{x^2+4}^x dx$$

$$= \int_{-4}^2 (2x^2(x) - (x)^3) - (2x^2(x^2+4) - (x^2+4)^3) dx$$

$$= \int_{-4}^2 (2x^3 - x^3) - (2x^4 + 8x^2 - (x^2+4)^3) dx$$

$$= \int_{-4}^2 x^3 - 2x^4 - 8x^2 + (x^2+4)^3 dx$$

$$= \int_{-4}^2 x^3 - 2x^4 - 8x^2 + (x^2)^3(4) + 3(x^2)4^2 + 4^3 dx$$

$$= \int_{-4}^2 x^3 - 2x^4 - 8x^2 + x^6 + 12x^4 + 48x^3 + 64 dx$$

$$= \int_{-4}^2 x^6 + 10x^4 + x^3 + 40x^2 + 64 dx$$

$$= \left(\frac{1}{7} x^7 + 2x^5 + \frac{1}{4} x^4 + \frac{40}{3} x^3 + 64x \right) \Big|_{-4}^2$$

$$= \left(\frac{1}{7} (2)^7 + 2(2)^5 + \frac{1}{4} (2)^4 + \frac{40}{3} (2)^3 + 64(2) \right) - \left(\frac{1}{7} (-4)^7 + 2(-4)^5 + \frac{1}{4} (-4)^4 + \frac{40}{3} (-4)^3 + 64(-4) \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{128}{7} + 64 + 4 \frac{320}{3} + 128 \right) - \left(\frac{-16384}{7} + 2(-1024) + \frac{1}{4}(256) + \frac{40}{3}(-64) + (-256) \right) \\
 &= \left(196 + \frac{128}{7} + \frac{320}{3} + \frac{16384}{7} + 2048 - 64 \frac{2560}{3} + 256 \right) \\
 &= 2436 + \frac{16512}{7} + \frac{2880}{3} \\
 &= \frac{51156}{21} + \frac{49536}{21} + \frac{8640}{21} = \frac{109332}{21}
 \end{aligned}$$

d. $\int_{-1}^0 \int_{y+1}^{2y} (xy) dx dy$

Jawab:

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2} x^2 y \right) \Big|_{y+1}^{2y} dy \\
 &= \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2} (2y)^2 y \right) - \left(\frac{1}{2} (y+1)^2 y \right) dy \\
 &= \int_{-1}^0 2y^3 - \frac{1}{2} (y^2 + 2y + 1)y dy \\
 &= \int_{-1}^0 2y^3 - \frac{1}{2} y^2 + y + \frac{1}{2} dy \\
 &= \left(\frac{1}{2} y^4 - \frac{1}{6} y^3 + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} y \right) \Big|_{-1}^0 \\
 &= \left(\frac{1}{2} (0)^4 - \frac{1}{6} (0)^3 + \frac{1}{2} (0)^2 + \frac{1}{2} (0) \right) - \left(\frac{1}{2} (-1)^4 - \frac{1}{6} (-1)^3 + \frac{1}{2} (-1)^2 + \frac{1}{2} (-1) \right) \\
 &= 0 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) \\
 &= - \left(\frac{3}{6} + \frac{1}{6} \right)
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{4}{6}$$

$$= -\frac{2}{3}$$

e. $\int_1^2 \int_0^{y^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{x}{y^2}\right) dx dy$

Jawab:

$$= \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2y^2} \right) \bigg|_0^{y^{\frac{3}{2}}} dy$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{\left(y^{\frac{3}{2}}\right)^2}{2y^2} \right) - \left(\frac{(0)^2}{2y^2} \right) dy$$

$$= \int_1^2 \frac{y^3}{2y^2} - 0 dy$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{2} y dy$$

$$= \left(\frac{1}{4} y^2 \right) \bigg|_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{4} (2)^2 \right) - \left(\frac{1}{4} (1)^2 \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$



B. Integral Lipat Tiga

- Untuk fungsi tiga variabel.
- Analog dengan integral lipat dua, integral lipat tiga pada daerah

$$B = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

- Jika fungsi f kontinu pada daerah B , maka

$$\iiint_B f(x, y, z) dv = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z) dz dy dx$$

- Teorema Fubini juga berlaku.

Contoh:

Hitunglah

$$\iiint_B 8xyz \, dV, \quad B = [2, 3] \times [1, 2] \times [0, 1]$$

Jawab:

$$\begin{aligned} \iiint_B 8xyz \, dV &= \int_1^2 \int_2^3 \int_0^1 8xyz \, dz \, dx \, dy \\ &= \int_1^2 \int_2^3 4xyz^2 \Big|_0^1 \, dx \, dy \\ &= \int_1^2 \int_2^3 4xy \, dx \, dy \\ &= \int_1^2 2x^2 y \Big|_2^3 \, dy \\ &= \int_1^2 10y \, dy \\ &= 5y^2 \Big|_1^2 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Seperti halnya integral lipat dua, integral lipat tiga dapat juga berlaku pada daerah umum E .

1. Jenis I

$$E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

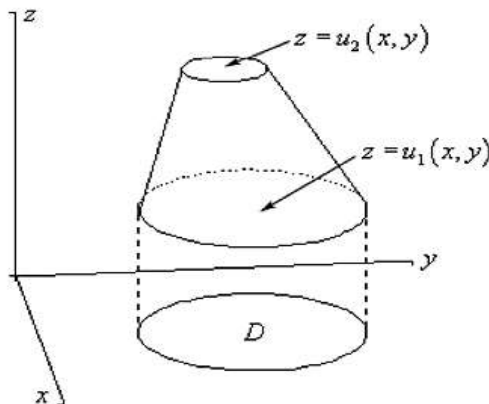
Jadi:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA.$$

Daerah D dapat berupa (Ingat integral lipat dua):

- Segiempat, $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.
- Daerah jenis I, $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$.
- Daerah jenis II, $D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$.

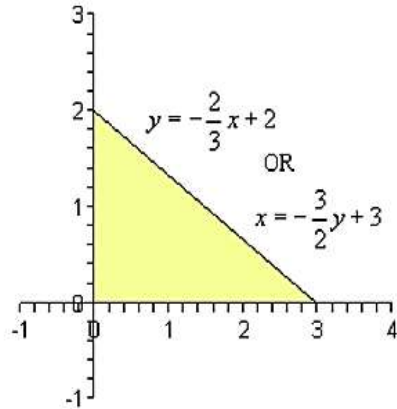
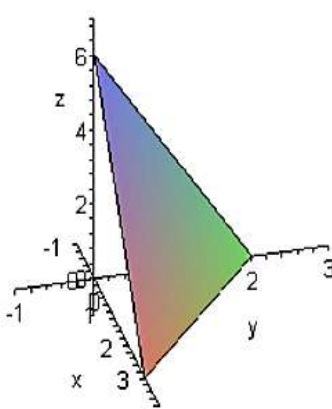
$$E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$



Contoh hitunglah:

$$\iiint_E 2x \, dV$$

dimana E adalah daerah di bawah bidang $2x + 3y + z = 6$ pada kuadran pertama



$$0 \leq z \leq 6 - 2x - 3y$$

$$0 \leq x \leq 3 \quad \Bigg| \quad 0 \leq x \leq -\frac{3}{2}y + 3$$

$$0 \leq y \leq -\frac{2}{3}x + 2 \quad \Bigg| \quad 0 \leq y \leq 2$$

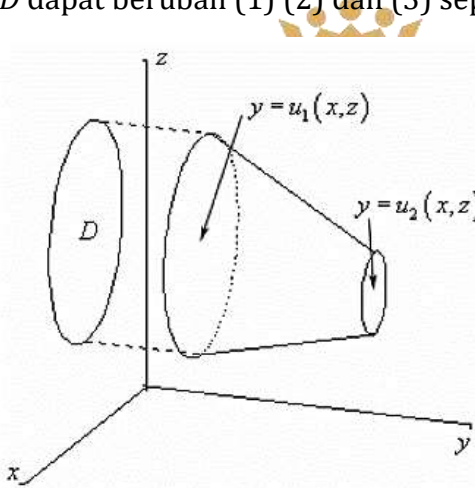
$$\begin{aligned} \iiint_E 2x \, dV &= \iint_D \left[\int_0^{6-2x-3y} 2x \, dz \right] dA \\ &= \iint_D 2xz \Big|_0^{6-2x-3y} dA \\ &= \int_0^3 \int_0^{-\frac{2}{3}x+2} 2x(6-2x-3y) \, dy \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^3 \left(12xy - 4x^2y - 3xy^2 \right) \bigg|_0^{\frac{2}{3}x+2} dx \\
 &= \int_0^3 \frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 12x dx \\
 &= \left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 6x^2 \right) \bigg|_0^3 \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

2. Jenis II

$$E = \{(x, y, z) | (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

D dapat berubah (1) (2) dan (3) seperti di jenis I



Contoh hitunglah:

$$\iiint_E \sqrt{3x^2 + 3z^2} dV$$

dimana E adalah benda pejal yang dibatasi oleh $y = 2x^2 + 2z^2$ dan bidang $y = 8$

$$2x^2 + 2z^2 = 8 \implies x^2 + z^2 = 4$$

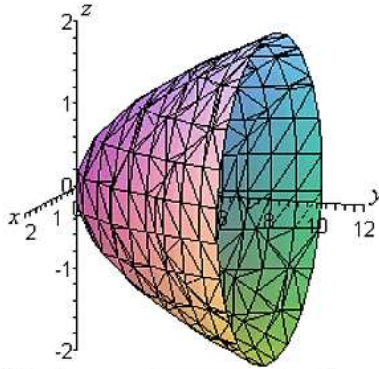
$$x = r \cos \theta$$

$$z = r \sin \theta$$

$$2x^2 + 2z^2 \leq y \leq 8$$

$$0 \leq r \leq 2$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$



$$\begin{aligned} \iiint_E \sqrt{3x^2 + 3z^2} \, dV &= \iint_D \left[\int_{2x^2+2z^2}^8 \sqrt{3x^2 + 3z^2} \, dy \right] dA \\ &= \iint_D \left(y\sqrt{3x^2 + 3z^2} \right) \Big|_{2x^2+2z^2}^8 dA \\ &= \iint_D \sqrt{3(x^2 + z^2)} (8 - (2x^2 + 2z^2)) dA \end{aligned}$$

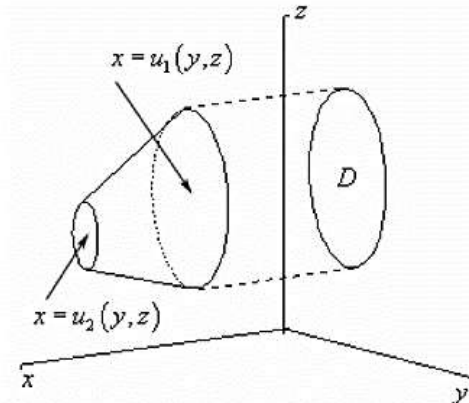
$$\begin{aligned} \sqrt{3(x^2 + z^2)} (8 - (2x^2 + 2z^2)) &= \sqrt{3r^2(8 - 2r^2)} \\ &= \sqrt{3r}(8 - 2r^2) \\ &= \sqrt{3r}(8 - 2r^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_E \sqrt{3x^2 + 3z^2} \, dV &= \iint_D \sqrt{3} (8r - 2r^3) dA \\ &= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (8r - 2r^3) r \, dr \, d\theta \\ &= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{3} r^3 - \frac{2}{5} r^5 \right) \Big|_0^2 d\theta \\ &= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} \frac{128}{15} d\theta \\ &= \frac{256\sqrt{3} \pi}{15} \end{aligned}$$

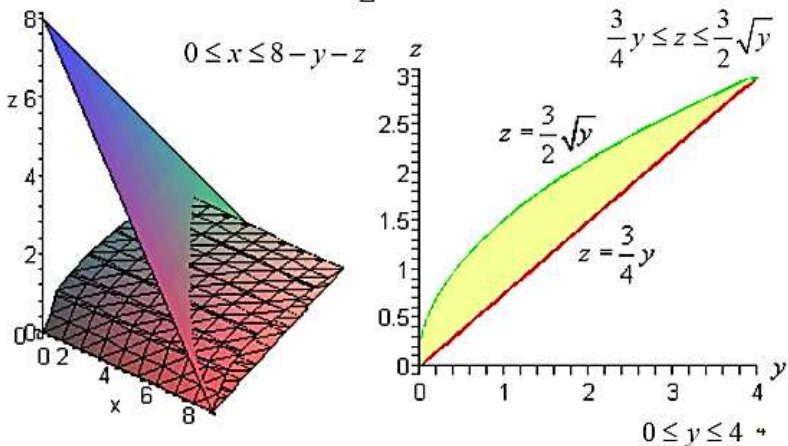
3. Jenis III

$$E = \{(x, y, z) | (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

D dapat berubah (1) (2) dan (3) seperti di jenis I



Contoh: Hitung volume daerah yang terletak di belakang bidang $x + y + z = 8$ dan di depan bidang yz yang dibatasi oleh $z = \frac{3}{2}\sqrt{y}$ dan $z = \frac{3}{4}\sqrt{y}$



$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_E dV = \iint_D \left[\int_0^{8-y-z} dx \right] dA \\
 &= \int_0^4 \int_{3y/4}^{3\sqrt{y}/2} 8 - y - z \, dz \, dy \\
 &= \int_0^4 \left(8z - yz - \frac{1}{2}z^2 \right) \bigg|_{\frac{3y}{4}}^{\frac{3\sqrt{y}}{2}} dy \\
 &= \int_0^4 12y^{\frac{1}{2}} - \frac{57}{8}y - \frac{3}{2}y^{\frac{3}{2}} + \frac{33}{32}y^2 \, dy \\
 &= \left(8y^{\frac{3}{2}} - \frac{57}{16}y^2 - \frac{3}{5}y^{\frac{5}{2}} + \frac{11}{32}y^3 \right) \bigg|_0^4 = \frac{49}{5}
 \end{aligned}$$

Integral Lipat Tiga dalam Koordinat Silinder dan Koordinat Bola

1. Koordinat Silinder

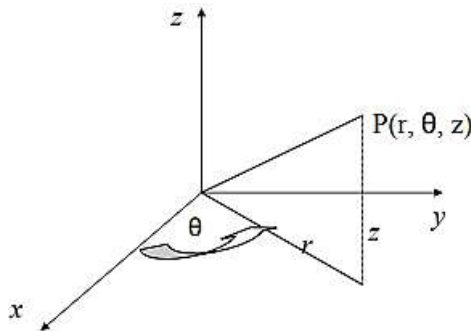
Dalam koordinat silinder, titik $P(x, y, z)$ dikonversi ke titik $P(r, \theta, z)$.

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

$$dV = r \, dz \, dr \, d\theta$$



Misalf kontinu pada E dan $E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(y, z)\}$

dengan D diberikan dalam koordinat polar oleh

$$D = \{(r, \theta | \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta))\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

dikonversi dari koordinat siku-siku ke koordinat silinder sebagai berikut:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{u_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta$$

Contoh hitunglah:

$$\iiint_E y dV$$

dimana E adalah daerah di bawah bidang $z = x = 2$ dan di atas bidang xy serta di antara silinder $x^2 + y^2 = 1$ dan $x^2 + y^2 = 4$

$$\text{Jawab: } 0 \leq z \leq x = 2 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq z \leq r \cos \theta + 2$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 1 \leq r \leq 2$$

$$\begin{aligned} \iiint_E y dV &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{r \cos \theta + 2} (r \sin \theta) r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \sin \theta (r \cos \theta + 2) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \sin \theta (r \cos \theta + 2) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{2} r^3 \sin(2\theta) + 2r^2 \sin \theta dr d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8} r^4 \sin(2\theta) + \frac{2}{3} r^3 \sin \theta \right) \Big|_1^2 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{15}{8} \sin(2\theta) + \frac{14}{3} \sin \theta d\theta \\
 &= \left(-\frac{15}{16} \cos(2\theta) - \frac{14}{3} \cos \theta \right) \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Contoh: Konversi integral berikut ke koordinat silindris

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{x+y^2}^{\sqrt{x^2-y^2}} xyz \, dz \, dx \, dy$$

Jawab:

$$-1 \leq y \leq 1 \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \qquad 0 \leq r \leq 1$$

$$x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \qquad r^2 \leq z \leq r$$

$$\begin{aligned}
 &\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz \, dz \, dx \, dy \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \int_{r^2}^r r(r \cos \theta)(r \sin \theta) z \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \int_{r^2}^r z r^3 \cos \theta \sin \theta \, dz \, dr \, d\theta
 \end{aligned}$$

2. Koordinat Bola

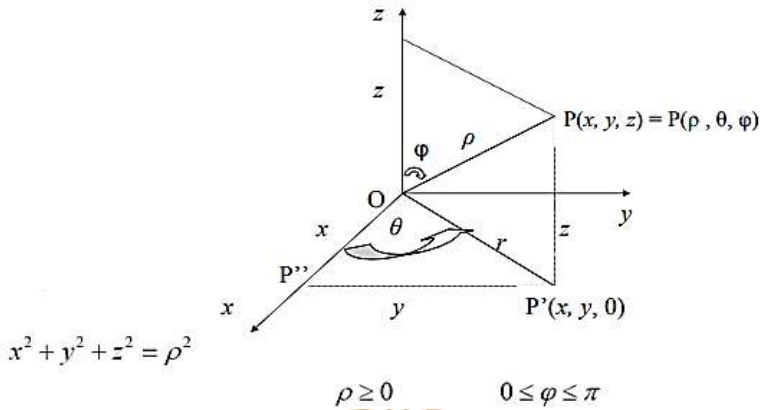
Perhatikan $\triangle OPP'$:

$$z = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$x = \rho \sin \theta \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta \cos \theta$$



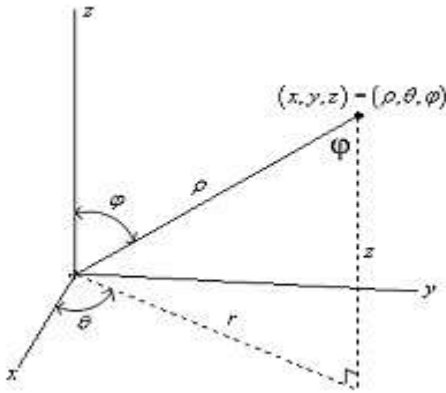
Perhatikan $\triangle OP'P''$:

$x = r \cos \theta$; karena $r = \rho \sin \varphi$, maka

$$= \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$y = r \sin \theta$; karena $r = \rho \sin \varphi$, maka

$$= r \sin \varphi \cos \theta$$



$$\rho^2 = r^2 + z^2; \Delta OPP'$$

$$\underbrace{= x^2 + y^2 + z^2}_{\text{Persamaan Bola dengan } \rho \text{ jari-jari bola}}; r^2 = x^2 + y^2 \quad (\Delta OP'P'')$$

ρ^2 = jarak titik asal ke P

θ = sudut antara sumbu $-x$ dengan OP'

φ = sudut antara sumbu $-z$ positif dengan OP

$$\rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$E = \{(\rho, \theta, \varphi) | a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, \delta \leq \varphi \leq \gamma\}$$

Dalam koordinat polar:

$$dA = r d\theta dr$$

Dalam Koordinat Bola:

$$\Delta V_{ijk} = \underbrace{\Delta \rho}_{\text{tinggi}} (\underbrace{\rho_i \Delta \varphi)(\rho_i \sin \varphi_k \Delta \theta)}_{\text{Luas Alas}}$$

$$dV = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

Jadi, konversi dari koordinat siku-siku ke koordinat bola:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_{\delta}^{\gamma} \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

Contoh hitunglah:

$$\iiint_E 16z dV$$

dimana E adalah setengah bola $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ bagian atas

Jawab: $0 \leq \rho \leq 1$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$



$$\begin{aligned} \iiint_E 16z dV &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi (16\rho \cos \varphi) d\rho d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 8\rho^3 \sin(2\varphi) d\rho d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 2 \sin(2\varphi) d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\pi \sin(2\varphi) d\varphi \\ &= -2\pi \cos(2\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

Contoh: konversi integral berikut ke koordinat bola

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} x^2 + y^2 + z^2 \, dz \, dx \, dy$$

Jawab:

$$0 \leq y \leq 3 \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq x \leq \sqrt{9-y^2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{18 - x^2 - y^2} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 18$$

$$0 \leq \rho \leq \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = 18$$

$$z^2 + z^2 = 18$$

$$z^2 = 9$$

$$z = 3$$

$$\rho \cos \varphi = 3$$

$$3\sqrt{2} \cos \varphi = 3$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

$$z = r$$

$$\rho \cos \varphi = \rho \sin \varphi$$

$$1 = \tan \varphi \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} x^2 + y^2 + z^2 \, dz \, dx \, dy$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} \int_0^{3\sqrt{2}} \rho^4 \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

Ringkasan Bab

- Integral lipat dua dan tiga adalah generalisasi dari integral biasa untuk fungsi multivariabel.
- Integral lipat dua digunakan untuk menghitung luas dan volume di bawah permukaan dua variabel.
- Integral lipat tiga menghitung volume dalam ruang tiga dimensi.
- Integral lipat bisa dilakukan dalam koordinat Kartesius, polar, silinder, dan bola.
- Digunakan dalam aplikasi fisika, teknik, dan rekayasa untuk menghitung massa, momen inersia, dan lain-lain.

BAB 6

DERET FOURIER

Capaian Pembelajaran Bab

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan konsep dasar deret Fourier sebagai representasi fungsi periodik.
2. Menentukan koefisien Fourier dari suatu fungsi periodik.
3. Menyusun bentuk umum deret Fourier (sin-cos dan kompleks).
4. Menggunakan sifat-sifat simetri fungsi untuk menyederhanakan deret Fourier.
5. Menerapkan deret Fourier dalam pemodelan fenomena fisika dan teknik.

Pengantar Konseptual

Banyak fenomena fisika dan teknik yang bersifat periodik, seperti gelombang bunyi, arus listrik bolak-balik, atau getaran mekanik. Deret Fourier merupakan alat matematis yang sangat ampuh untuk merepresentasikan fungsi-fungsi periodik tersebut sebagai jumlah tak hingga dari fungsi sinus dan kosinus. Dengan demikian, deret Fourier menghubungkan dunia fungsi waktu-ke ruang frekuensi,

yang menjadi dasar dalam analisis sinyal, sistem dinamik, dan pemrosesan data.

A. Fungsi Periodik

Bila $f(x)$ merupakan fungsi periodic dalam interval $(-L, L)$ yaitu periode $2L$, maka $f(x)$ dapat dinyatakan dalam bentuk deret yang disebut *Deret fourier*:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

dimana: $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Bila $f(x)$ periodic dalam interval $(c, c+2L)$, maka koefisien a_n dan b_n dapat ditulis dalam bentuk :

$$a_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Yang Sering Digunakan Pada Deret Fourier

1. $\int u dv = uv - \int v du$ atau

$\int u v = u v_1 - u' v_2 + u'' v_3 - \dots$ dimana

U = turunan pertama

$v_1 = \int v dx$ dan seterusnya.

Contoh:

$$\begin{array}{rcl}
 \int x^3 \sin 2x \, dx & = & \frac{-x^3}{2} \cos 2x - \left(-\frac{3x^2}{4} \sin 2x\right) + \left(\frac{6x}{8} \cos 2x\right) - \frac{6}{16} \sin 2x \\
 3x^2 & \searrow & \frac{-1}{2} \cos 2x \\
 6x & \searrow & -\frac{1}{4} \sin 2x \\
 6 & \searrow & \frac{1}{8} \cos 2x \\
 0 & \searrow & \frac{1}{16} \sin 2x
 \end{array}$$

Jadi bagian kiri diturunkan sampai menjadi 0 dan bagian kanan di integralkan, kemudian dikalikan dari kiri ke kanan sesuai dengan arah panah, dimulai dengan tanda positif lalu negatif yang selalu berganti-ganti.

2. $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\sin n\pi = 0$

$\sin \frac{n\pi}{2} = 0$ untuk n genap

$\cos \frac{n\pi}{2} = 0$ untuk n ganjil

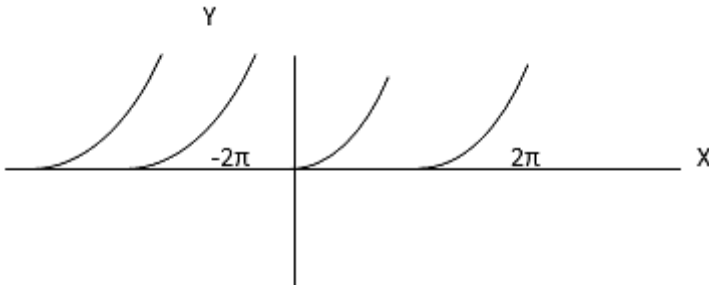
$\cos n\pi = (-1)^n$

$\cos 2n\pi = 1$

Contoh:

1) Perderetkan $f(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$, (periode 2π , $L = \pi$)

Penyelesaian:



$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cdot dx = \frac{1}{3\pi} x^3 \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{3\pi} (8\pi^3) \\ &= \frac{8\pi^2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cdot \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cdot \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4} \left(0 + \frac{4\pi}{n^2} + 0 \right) \\ &= -\frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} x^2 \cos nx \\ \swarrow \searrow \\ 2x \quad \frac{1}{n} \sin nx \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad \frac{-1}{n^2} \cos nx \\ \swarrow \searrow \\ 0 \quad \frac{-1}{n^3} \sin nx \end{array}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cdot \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-x^2}{n} \cos nx + \frac{2x}{n^2} \sin nx + \frac{2}{n^3} \cos nx \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{-4\pi^2}{n} + 0 + 0 \right) \\ &= -\frac{4\pi}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} x^2 \sin nx \\ \swarrow \searrow \\ 2x \quad \frac{-1}{n} \cos nx \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad \frac{-1}{n^2} \sin nx \\ \swarrow \searrow \\ 0 \quad \frac{1}{n^3} \cos nx \end{array}$$

$$\text{Jadi } f(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$

2) Carilah deret fourier dari fungsi f dimana

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -5 < x < 0 \\ 3, & 0 < x < 5 \end{cases} \quad \text{dengan periode 10}$$

Solusi:

Periode dari f adalah $2L = 10$, sehingga $L = 5$. Dengan formula diatas diperoleh:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \left(\frac{n\pi x}{5} \right) dx = \frac{1}{5} \left\{ \int_{-5}^0 0 \cdot \cos \left(\frac{n\pi x}{5} \right) dx + \int_0^5 3 \cdot \cos \left(\frac{n\pi x}{5} \right) dx \right\} \\ &= \frac{3}{5} \int_0^5 \cos \left(\frac{n\pi x}{5} \right) dx = \frac{3}{5} \left\{ \frac{5}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi x}{5} \right) \right\} \Big|_0^5 \\ &= \frac{3}{n\pi} \{ \sin(n\pi) - \sin 0 \} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{3}{5} \int_0^5 1 dx = 3;$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{5} \right) dx = \frac{1}{5} \left\{ \int_{-5}^0 0 \cdot \sin \left(\frac{n\pi x}{5} \right) dx + \int_0^5 3 \cdot \sin \left(\frac{n\pi x}{5} \right) dx \right\} \\ &= \frac{3}{5} \int_0^5 \sin \left(\frac{n\pi x}{5} \right) dx = \frac{3}{5} \left\{ -\frac{5}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{5} \right) \right\} \Big|_0^5 \\ &= \frac{3}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)), \quad \dots n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -5 < x < 0 \\ 3, & 0 < x < 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{periode} = 10$$

Jadi deret fourier dari fungsi f adalah:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right\}$$

$$= \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1 - \cos(n\pi))}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi x}{5} \right)$$

B. Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

1. Fungsi Genap

Fungsi $f(x)$ dikatakan fungsi genap (symmetric) bila: $f(-x) = f(x)$ perderetan fungsi genap tidak memuat suku-suku sinus, jadi $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

Contoh:

- a. Perderetan $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$ (periode 2π)

Fungsi ini adalah fungsi genap, jadi $b_n = 0$

Penyelesaian:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cdot dx = \frac{2}{3\pi} x^3 \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{3\pi} (\pi^3)$$

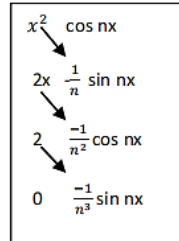
$$= \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cdot \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(0 + \frac{2\pi \cos n\pi}{n^2} + 0 \right)$$

$$= \frac{4}{n^2} (-1)^n$$



$$\text{Jadi } f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

$$\text{Atau } = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots \right)$$

2. Fungsi Ganjil

Fungsi $f(x)$ dikatakan ganjil (skew symmetric) bila: $f(-x) = -f(x)$. Perderetan fungsi ganjil hanya memuat suku-suku sinus, jadi a_0 dan $a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Contoh:

a. Perderetan $f(x) = x^3$, $-\pi < x < \pi$, (periode 2π)

$F(x) = x^3$, adalah fungsi ganjil, jadi cukup dicari b_n saja.

Penyelesaian:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^3 \cdot \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-x^3}{n} \cos nx + \frac{3x^2}{n^2} \sin nx + \frac{6x}{n^3} \cos nx - \frac{6}{n^4} \sin nx \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\pi^3}{n} \cos n\pi + \frac{6\pi \cos n\pi}{n^3} \right)$$

$$= 2 (-1)^n \left(-\frac{\pi^2}{n} + \frac{6}{n^3} \right)$$

$$\text{Jadi : } f(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{\pi^2}{n} + \frac{6}{n^3} \right) \sin nx$$

$$\begin{array}{rcl} x^3 & \rightarrow & \sin nx \\ 3x^2 & \rightarrow & -\frac{1}{n} \cos nx \\ 6x & \rightarrow & -\frac{1}{n^2} \sin nx \\ 6 & \rightarrow & \frac{1}{n^3} \cos nx \\ 0 & \rightarrow & \frac{1}{n^4} \sin nx \end{array}$$

- b. Perderetan $f(x) = x$, $-2 < x < 2$, (periode 4, $L = 2$)

Fungsi ini adalah fungsi ganjil, jadi cukup mencari b_n saja karena a_0 dan a_n akan sama dengan nol.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2}{2} \int_0^2 x \cdot \sin \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= \left(-\frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \right) \\ &= -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi + 0 \\ &= -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi = -\frac{4}{n\pi} (-1)^n \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} x & \rightarrow & \sin \frac{n\pi x}{2} \\ 1 & \rightarrow & -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \\ 0 & \rightarrow & \frac{-4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \end{array}$$

$$\text{Jadi : } f(x) = -\frac{4}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{n\pi x}{2}}{n}$$

C. Sinus Dan Cosinus Fourier 1/2 - Jangkauan

Sinus fourier atau cosinus fourier $\frac{1}{2}$ jangkauan adalah suatu deret yang hanya memuat suku- suku dari sinus atau

cosinus. Pada sinus $\frac{1}{2}$ jangkauan atau cosinus, fungsi hanya didefinisikan dalam setengah interval yaitu $(0, L)$.

1. Sinus Fourier $\frac{1}{2}$ Jangkauan

Sinus $\frac{1}{2}$ jangkauan dalam interval $(-L, L)$ merupakan fungsi ganjil jadi pada sinus $\frac{1}{2}$ jangkauan yang dicari hanya b_n .

Untuk sinus $\frac{1}{2}$ jangkauan : (dalam deret sinus)

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad a_0 \text{ dan } a_n = 0$$

$$\text{Sehingga } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \left(n \frac{\pi}{L} x \right)$$

Contoh:

a. Perderetan $f(x) = x, \quad 0 < x < 2$

Dalam sinus $\frac{1}{2}$ jangkauan, atau biasa disebut perderetkan dalam deret sinus.

Penyelesaian: (disini yang dicari hanya b_n)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{2}{2} \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{-2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} - \frac{-4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 \\ &= \frac{-4}{n\pi} \cos n\pi \end{aligned}$$

$$\text{Jadi : } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{n\pi} \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$\begin{array}{l} x \quad \sin \frac{n\pi x}{2} \\ \swarrow \\ 1 \quad \frac{-2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \\ \swarrow \\ 0 \quad \frac{-4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \end{array}$$

2. Cosinus ½ Jangkauan

Cosinus ½ jangkauan merupakan fungsi genap dalam $(-L, L)$ jadi pada cosinus ½ jangkauan yang dicari hanya a_0 dan a_n .

Untuk cosinus ½ jangkauan: (dalam deret cosinus)

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \text{ dimana } b_n = 0$$

$$\text{Sehingga: } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left(n \frac{\pi}{L} x \right)$$

Contoh:

a. Perderetkan $f(x) = x$, $0 < x < 2$

Dalam cosinus ½ jangkauan, atau perderetkan dalam deret cosinus

Penyelesaian: (disini yang dicari hanya a_0 dan a_n)

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$= \frac{2}{2} \int_0^2 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^2 = 2$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$= \frac{2}{2} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2x}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} - \frac{-4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1),$$

$$\text{Jadi : } f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1) \cos \frac{n\pi x}{2}$$

$$\begin{array}{l} x \cos \frac{n\pi x}{2} \\ \downarrow \\ 1 \quad \frac{-2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \\ \downarrow \\ 0 \quad \frac{-4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \end{array}$$

- b. Perderetkan $f(x) = \sin x$, $0 < x < \pi$, ke dalam deret cosinus

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \, dx = \frac{-2}{\pi} \cos x \Big|_0^\pi \\
 &= \frac{-2}{\pi} (-1 - 1) = \frac{4}{\pi} \\
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cdot \cos \frac{n\pi x}{\pi} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos nx \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin x \sin nx}{n} + \frac{\cos x \cos nx}{n^2} + \frac{1}{n^2} \int_0^\pi \sin x \cos nx \, dx \right] \\
 &= \frac{n^2}{(n^2-1)} \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin x \sin nx}{n} + \frac{\cos x \cos nx}{n^2} \right]_0^\pi \\
 &= \frac{n^2}{n^2-1} \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\cos n\pi-1}{n^2} \right) = \frac{1}{n^2-1} \frac{-2}{\pi} \left(\frac{\cos n\pi+1}{1} \right), \quad (0 \text{ untuk } n \\
 &\quad \text{ganjil}) \\
 &= \frac{-4}{((2n)^2-1)\pi}
 \end{aligned}$$

Jadi : $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2-1} \cos 2nx$

D. Identitas Parseval

Bila deret fourier dari $f(x)$ konvergen uniform ke $f(x)$ dalam interval $(-L,L)$ maka:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L \{f(x)\}^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum (a_n^2 + b_n^2)$$

Contoh:

Buktikan : $\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots$

Bila diberikan:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (f(x) = x^2, -\pi \leq x \leq \pi)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{5\pi} \pi^5 \\ &= \frac{2}{5} \pi^4 \end{aligned}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{3} \text{ atau } a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{4}{n^2} (-1)^n$$

$$\frac{2}{5} \pi^4 = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi^2}{3} \right)^2 + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\frac{2\pi^4}{5} = \left(\frac{2\pi^2}{3} \right)^2 \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4}$$

$$\frac{2(9-5)}{45} \pi^4 = 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

Ringkasan Bab

- Deret Fourier digunakan untuk menyatakan fungsi periodik sebagai jumlah fungsi sinus dan kosinus.
- Terdapat dua bentuk utama: bentuk sin-kos dan bentuk kompleks.

- Koefisien Fourier ditentukan melalui integral pada satu periode.
- Sifat simetri fungsi (genap atau ganjil) menyederhanakan perhitungan.
- Deret Fourier digunakan dalam analisis sinyal, pemodelan fisis, dan sistem teknik.

Latihan Soal

1. Tentukan deret Fourier dari fungsi:

$$f(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

2. Temukan bentuk kompleks deret Fourier untuk fungsi periodik:

$$f(x) = \sin(x) + 2 \cos(2x)$$

3. Tentukan deret Fourier untuk fungsi $f(x) = x$ pada interval $(0, 2\pi)$ dan identifikasi simetri.
4. Buktikan bahwa deret Fourier dari $f(x) = x^2$ konvergen menuju $f(x)$ pada titik kontinu.

BAB 7

FUNGSI GAMMA DAN FUNGSI BETA

Capaian Pembelajaran Bab

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Menjelaskan definisi dan sifat-sifat fungsi Gamma dan Beta.
2. Menghubungkan fungsi Gamma dan Beta dengan integral tak tentu dan fungsi faktorial.
3. Menggunakan fungsi Gamma dan Beta dalam penyelesaian integral yang tidak elementer.
4. Menerapkan fungsi Gamma dan Beta dalam konteks statistik, probabilitas, dan kalkulus lanjutan.

Pengantar Konseptual

Dalam kalkulus lanjutan, kita sering menemukan bentuk integral yang tidak dapat dievaluasi secara eksplisit menggunakan fungsi elementer. Fungsi Gamma dan Beta merupakan generalisasi dari konsep faktorial dan sering digunakan dalam teori distribusi, integral tak hingga, dan teori probabilitas. Fungsi Gamma, misalnya, memperluas

definisi faktorial ke bilangan real positif. Fungsi Beta terkait erat dengan integral trigonometri dan memiliki aplikasi dalam statistik dan fisika.

A. Fungsi Gamma

Gamma = $\Gamma (n)$.

Gamma = $\Gamma (n)$ disebut juga sebagai fungsi faktorial yaitu perkalian berlanjut di mana $n = 1, 2, 3, \dots$ (bilangan asli).

Fungsi gamma dinyatakan sebagai:

Fungsi Gamma dinyatakan sebagai:

$$1. \quad \Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad n > 0$$

$$2. \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \\ = n(n-1)(n-2) \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad n = 1, 2, 3$$

$$3. \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$4. \quad \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad 0 < p < 1$$

$$5. \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad 0 < p < 1$$

$$6. \quad \Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} \quad n < 0$$

$$7. \quad \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2^m} \sqrt{\pi} \quad m = 1, 2, 3$$

$$8. \quad \Gamma\left(-m + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^m 2^m \sqrt{\pi}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)} \quad m = 1, 2, 3$$

Contoh:

a. Tentukannlah nilai dari $\Gamma (5)$

Jawab:

$$\begin{aligned}\Gamma (5) &= \Gamma (n+1) \\ &= \Gamma (4+1)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Gamma (n+1) = n \Gamma (n)$$

$$\begin{aligned}\Gamma (4+1) &= 4 \Gamma (4) \\ &= (4.3.2.1) (4!) \\ &= 24\end{aligned}$$

$$n+1=5$$

$$n=5-1$$

$$n=4$$

b. Tentukanlah nilai dari $\Gamma \left(\frac{9}{2}\right)$

Jawab:

$$\begin{aligned}\Gamma \left(\frac{9}{2}\right) &= \Gamma (n+1) \\ &= n \Gamma (n)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Gamma (n+1) = n \Gamma (n)$$

$$\begin{aligned}\Gamma \left(\frac{7}{2}+1\right) &= \frac{7}{2} \Gamma \left(\frac{7}{2}\right) \\ &= \frac{7}{2} \frac{5}{2} \Gamma \left(\frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{7}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \Gamma \left(\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

$$n+1=\frac{9}{2}$$

$$n=\frac{9}{2}-1$$

$$n=\frac{7}{2}$$



$$= \frac{7}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{105}{16} \sqrt{\pi}$$

c. $\int_0^{\infty} e^{-x^3} dx = \Gamma(\dots)$

Jawab:

Misalkan: $x^3 = y$

$$x = y^{\frac{1}{3}}$$

$$dx = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} dy$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^3} dx = \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} dy$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\infty} y^{-\frac{2}{3}} e^{-y} dy$$

$$\Rightarrow \Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \Leftrightarrow \int_0^{\infty} y^{-\frac{2}{3}} e^{-y} dy$$

$n - 1 = -\frac{2}{3}$ $n = -\frac{2}{3} + 1$ $n = \frac{1}{3}$

Jadi. $\frac{1}{3} \int_0^{\infty} y^{-\frac{2}{3}} e^{-y} dy = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$

$$n \Gamma (n) = \Gamma (n + 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \Gamma \left(\frac{1}{3} \right) &= \Gamma \left(\frac{1}{3} + 1 \right) \\ &= \Gamma \left(\frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

$$d. \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^3 dx = \dots$$

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{x} &= \ln 1 - \ln x \\ &= 0 - \ln x \\ &= -\ln x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^3 dx = \int_1^0 (-\ln x)^3 dx$$

Jawab:

Misalkan: $-\ln x = y$

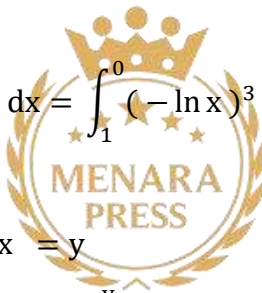
$$x = e^{-y}$$

$$dx = -e^{-y} dy$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (-\ln x)^3 dx = \int_0^1 (y)^3 \cdot e^{-y} dy$$

$$= - \int_0^1 y^3 e^{-y} dy$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Gamma (n) &= \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty y^3 \cdot e^{-y} dy \\ &= \Gamma (4) \end{aligned}$$



$$= 3 \Gamma(3) = 3!$$

$$= 3.2.1 = 6$$

$$n-1 = 3$$

$$n = 3+1$$

$$n = 4$$

e. $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = \dots$

Penyelesaian:

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = \Leftrightarrow \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = \Gamma(4)$$

$$= 3 \Gamma(3)$$

$$= 3!$$

$$= 6$$

$$n-1 = 3$$

$$n = 3+1$$

$$n = 4$$

f. $\int_0^{\infty} x^3 e^{-2x} dx = \dots$

penyelesaian:

Mis : $2x = y$

$$x = \frac{1}{2} y$$

$$dx = \frac{1}{2} dy$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} x^3 e^{-2x} dx = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} y\right)^3 \cdot e^{-y} \frac{1}{2} dy$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot y^3 \cdot e^{-y} \frac{1}{2} dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right) y^3 \cdot e^{-y} \frac{1}{2} dy \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{1}{16} y^3 \cdot e^{-y} \frac{1}{2} dy \\
 &= \frac{1}{16} \int_0^{\infty} y^3 e^{-y} dx \\
 &\Rightarrow \frac{1}{16} \Gamma(4) \\
 &= \frac{1}{16} (3 \Gamma(3)) \\
 &= \frac{1}{16} \cdot 3! \\
 &= \frac{1}{16} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
 &= \frac{6}{16} = \frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

g. $\int_0^{\infty} \sqrt{x} \cdot e^{-\sqrt[3]{x}} dx = \dots$

Penyelesaian:

Mis : $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = y$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = y^3$$

$$x = y^3$$

$$dx = 3y^2 dy$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \sqrt{x} \cdot e^{-\sqrt[3]{x}} dx = \int_0^{\infty} \sqrt{y^3} \cdot e^{-y} 3y^2 dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\infty} (y^3)^{\frac{1}{2}} e^{-y} 3y^2 dy \\
 &= \int_0^{\infty} y^{\frac{3}{2}} e^{-y} 3y^2 dy \\
 &= 3 \int_0^{\infty} y^{\frac{3}{2}} y^2 e^{-y} dy \\
 &= 3 \int_0^{\infty} y^{\frac{7}{2}} e^{-y} dy
 \end{aligned}$$

$$3 \int_0^{\infty} y^{\frac{7}{2}} e^{-y} dy \Leftrightarrow \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$3 \int_0^{\infty} y^{\frac{7}{2}} e^{-y} dy = 3 \Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$$

$$= 3 \left(\frac{7}{2} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \right)$$

$$= 3 \cdot \frac{7}{2} \left(\frac{5}{2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \right)$$

$$= 3 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \left(\frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \right)$$

$$= 3 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right)$$

$$= 3 \cdot \frac{105}{16} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{315}{16} \sqrt{\pi}$$

$$n-1 = \frac{7}{2}$$

$$n = \frac{7}{2} + 1$$

$$n = \frac{9}{2}$$

B. Fungsi Beta

Fungsi Beta dinyatakan sebagai berikut:

1. $B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$
2. $B(m, n) = B(n, m)$
3. $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ convergen untuk n dan $m > 0$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} \varphi \cos^{2m-1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} B(m, n)$
5. $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad (0 < p < 1)$

Contoh:

a. $\int_0^1 x^8 (1-x)^4 dx = B(\dots)$

Sesuai dengan rumus yang menyatakan bahwa:

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

Maka sebelumnya kita akan mencari m dan n nya terlebih dahulu

$$m - 1 = 8$$

$$m = 8 + 1$$

$$m = 9$$

$$n - 1 = 4$$

$$n = 4 + 1$$

$$n = 5$$

$$\text{Jadi } \int_0^1 x^8 (1-x)^4 dx = B(9,5)$$

Selanjutnya kita akan membuktikan apakah benar $B(m, n) = B(n, m)$ untuk membuktikannya kita dapat menggunakan rumus:

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

dan rumus

$$B(n, m) = \frac{\Gamma(n) \Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$$

Jadi $B(9,5)$ adalah:

$$\begin{aligned} B(9,5) &= \frac{\Gamma(9) \cdot \Gamma(5)}{\Gamma(9+5)} \\ &= \frac{\Gamma(9) \cdot \Gamma(5)}{\Gamma(14)} \end{aligned}$$

Di persamaan gamma sebelumnya terdapat pernyataan

$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$ disini yang termasuk $\Gamma(n+1)$ adalah $\Gamma(9)$, $\Gamma(5)$ dan $\Gamma(14)$

$$\text{jadi } \Gamma(9) = n + 1 \qquad \Gamma(5) = n + 1$$

$$\Gamma(n) = 9 - 1 \qquad \Gamma(n) = 5 - 1$$

$$\Gamma(n) = 8 \qquad \Gamma(n) = 4$$

$$(14) = n + 1$$

$$\Gamma(n) = 14 - 1$$

$$\Gamma(n) = 13$$

$$\text{Jadi: } \frac{\Gamma(9) \cdot \Gamma(5)}{\Gamma(14)} = \frac{8 \Gamma(8) \cdot 4 \Gamma(4)}{13 \Gamma(13)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{8! \cdot 4!}{13!} \\
 &= \frac{8! \cdot 4 \times 3 \times 2 \times 1}{13 \times 12 \times 11 \times 10^5 \times 9 \times 8!} \\
 &= \frac{1}{13 \times 11 \times 5 \times 9} \\
 &= \frac{1}{6435}
 \end{aligned}$$

Sehingga: $B(5,9) = \frac{\Gamma(5) \cdot \Gamma(9)}{\Gamma(5+9)}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\Gamma(5) \cdot \Gamma(9)}{\Gamma(14)} \\
 &= \frac{4 \Gamma(4) \cdot 8 \Gamma(8)}{13 \Gamma(13)} \\
 &= \frac{4! \cdot 8!}{13!} \\
 &= \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 8!}{13 \times 12 \times 11 \times 10^5 \times 9 \times 8!} \\
 &= \frac{1}{13 \times 11 \times 5 \times 9} = \frac{1}{6435}
 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $B(m,n) = B(n,m)$

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

b. Hitunglah $\int_0^1 (1-x^3)^{-\frac{1}{2}} dx$!

Penyelesaian : Misalkan $x^3 = y$

$$x = y^{\frac{1}{3}}$$

$$dx = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} dy$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1-x^3)^{-\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 (1-y)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} (1-y)^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 y^{-\frac{2}{3}} (1-y)^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$\Rightarrow \int_0^1 y^{-\frac{2}{3}} (1-y)^{-\frac{1}{2}} dy \Leftrightarrow \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

$$m-1 = -\frac{2}{3}$$

$$n-1 = -\frac{1}{2}$$

$$m = -\frac{2}{3} + 1$$

$$n = -\frac{1}{2} + 1$$

$$m = \frac{1}{3}$$

$$n = \frac{1}{2}$$

$$\text{Jadi } \int_0^1 y^{-\frac{2}{3}} (1-y)^{-\frac{1}{2}} dy = B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \int_0^1 y^{-\frac{2}{3}} (1-y)^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{1}{3}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} \varphi \cos^{2m-1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} B(m, n)$$

c. Hitunglah $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi}}$!

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi}} d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\cos \varphi)^{\frac{1}{2}}} d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} \varphi \cos^{2n-1} \varphi d\varphi$$

$$2n - 1 = 0$$

$$2m - 1 = \frac{-1}{2}$$

$$2n = 1$$

$$2m = \frac{-1}{2} + 1$$

$$n = \frac{1}{2}$$

$$2m = \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi = \frac{1}{2} B(m, n)$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \Gamma(p) \Gamma(\pi - p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad (0 < p < 1)$$

d. Hitunglah $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

Misalkan $x^4 = y$

$$x = y^{\frac{1}{4}}$$

$$dx = \frac{1}{4} y^{-\frac{3}{4}} dy$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{4} y^{-\frac{3}{4}}}{1+y} dy$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{4} \frac{y^{-\frac{3}{4}}}{1+y} dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{y^{-\frac{3}{4}}}{1+y} dy$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{y^{-\frac{3}{4}}}{1+y} dy \Leftrightarrow \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \quad (0 < p < 1)$$

$$P - 1 = \frac{-3}{4}$$

$$P = \frac{-3}{4} + 1$$

$$P = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{-3}{4}}}{1+y} dy = \Gamma(P) \Gamma(1-P) = \frac{\pi}{\sin P\pi}$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{\sin \frac{1}{4} \pi} = \frac{1}{\sin \frac{1}{4}}$$

$$P = \frac{1}{4}$$

$$P-1 = \frac{3}{4}$$

Ringkasan

Fungsi Gamma menggeneralisasi faktorial ke domain bilangan real.

- Fungsi Beta berkaitan dengan integral pada interval $[0,1]$ dan memiliki hubungan erat dengan fungsi Gamma.
- Integral tak hingga dan integral pada domain terbatas sering dapat diselesaikan menggunakan fungsi Gamma dan Beta.
- Fungsi-fungsi ini sangat penting dalam bidang matematika terapan, statistik, dan fisika.

Latihan Soal

1. Hitung nilai $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$
2. Evaluasi $\int_0^{\infty} t^{2.5} e^{-t} dt$
3. Hitung $B(4,2)$ dengan rumus Gamma.
4. Tentukan nilai integral $\int_0^1 x^3 (1-x)^2 dx$
5. Buktikan bahwa $\Gamma(n+1) = n!$ untuk $n \in \mathbb{N}$

BAB 8

TRANSFORMASI LAPLACE

Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan definisi transformasi Laplace dan sifat-sifat dasarnya.
2. Menggunakan tabel transformasi Laplace untuk fungsi-fungsi umum.
3. Menentukan transformasi Laplace dari fungsi eksponensial, trigonometri, dan fungsi potensi.
4. Menerapkan transformasi Laplace dalam menyelesaikan persamaan diferensial linear orde satu dan orde dua dengan kondisi awal.

Pengantar Konseptual

Transformasi Laplace merupakan alat penting dalam analisis sistem dinamis dan penyelesaian persamaan diferensial. Konsep ini mengubah fungsi waktu $f(t)$ menjadi fungsi dalam domain kompleks $F(s)$, sehingga operasi diferensial menjadi operasi aljabar. Hal ini sangat membantu dalam bidang teknik, fisika, dan matematika terapan, khususnya dalam menganalisis sistem linier dan kontrol.

A. Pengertian Transformasi Laplace

Transformasi Laplace adalah proses mengubah fungsi $F(t)$ dari fungsi waktu ke fungsi kompleks $f(s)$ dari operasi kompleks S .

Transformasi Laplace dari suatu fungsi $F(t)$ didefinisikan sebagai:

$$L \{F(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot F(t) \cdot dt$$

Transformasi laplace untuk beberapa fungsi dasar:

No	$F(t)$	$F(s)$	Syarat
1.	1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
2.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
3.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
4.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
5.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$s > 0$

1. Buktikan $L \{ 1 \} =$

$$\text{Bukti: } F(s) = \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

2. Buktikan: $L \{ t^n \} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

$$\text{Bukti: } L\{1\} = L \{ t^0 \} = \frac{1}{s} = \frac{0!}{s^{0+1}}$$

$$L\{t\} = \frac{1}{s^2} = \frac{1!}{s^{1+1}}$$

$$L \{ t^2 \} = \frac{2}{s^3} = \frac{2!}{s^{2+1}}$$

$$L \{ t^n \} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

3. Buktikan $L \{ e^{at} \} = \frac{1}{s-a}$

Bukti: $F(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt$

$$dt = -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a} \quad s > a$$

Rumus Euler

$$e^{a+bi} = e^a \cdot a^{bi} \quad e^{a+bi} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

$$e^{-bi} = \cos b + i \sin b$$

$$\frac{e^{-bi} = \cos b - i \sin b}{e^{bi} + e^{-bi} = 2 \cos b} +$$

$$\cos b = \frac{e^{bi} + e^{-bi}}{2} \rightarrow \cos \omega = \frac{e^{\omega i} + e^{-\omega i}}{2}$$

$$e^{-bi} = \cos b + i \sin b$$

$$\frac{e^{-bi} = \cos b - i \sin b}{e^{bi} + e^{-bi} = 2 i \sin b} -$$

$$\sin b = \frac{e^{bi} - e^{-bi}}{2i} \rightarrow \sin \omega = \frac{e^{\omega i} - e^{-\omega i}}{2i}$$

4. Buktikan $L \{ \cos at \} = \frac{s}{s^2 + a^2}$

Bukti: $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cos at dt$

$$= e^{st} \frac{\sin at}{a} - \frac{s}{a^2} e^{-st} \cos at \Big| - \frac{s^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-st} \cos at dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a^2}{s^2+a^2} \left(e^{-st} \frac{\sin at}{a} - \frac{s}{a^2} \cos at \right) \Big|_0^\infty = \frac{a^2}{s^2+a^2} \frac{s}{a^2} \\
 &= \frac{s}{s^2+a^2}
 \end{aligned}$$

5. Buktikan $L\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$

Bukti: $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \sinh at \, dt$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\frac{e^{at}}{2} + \frac{e^{-at}}{2} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-st} (e^{at} - e^{-at}) \, dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{at} \, dt - \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{-at} \, dt \right] \\
 &= \frac{1}{2} [L\{e^{at}\} - L\{e^{-at}\}] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{s+a-(s-a)}{(s-a)(s+a)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{s+a-s+a}{s^2-a^2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{2a}{s^2-a^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

Contoh 1.

Carilah Transformasi Laplace dari:

a. $f(t) = 10$

b. $f(t) = 5 + 4e^{-2t}$

c. $f(t) = t - 2e^{-t}$

Penyelesaian:

a. $f(t) = 10$

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} 10 \cdot e^{-st} \cdot dt = \frac{10}{s}$$

b. $f(t) = 5 + 4e^{-2t}$

$$\begin{aligned} F(s) &= L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} (5 + 4e^{-2t})e^{-st} \cdot dt \\ &= \int_0^{\infty} 5e^{-st} \cdot dt + \int_0^{\infty} 4 \cdot e^{-(s+2)t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{5}{s} [e^{-st}]_0^{\infty} + \frac{4}{s+2} [e^{-(s+2)t}]_0^{\infty} \\ &= \frac{5}{s} + \frac{4}{s+2} = \frac{9s+10}{s(s+2)} \end{aligned}$$

Jadi $F(s) = \frac{9s+10}{s(s+2)}$

c. $f(t) = t - 2e^{-t}$

$$\begin{aligned} F(t) &= L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} (t - 2e^{-t})e^{-st} \cdot dt \\ &= \int_0^{\infty} t e^{-st} dt - \int_0^{\infty} 2e^{-(s+1)t} \cdot dt \\ &= -\frac{2}{s+1} + [t \int_0^{\infty} e^{-st} dt \end{aligned}$$

Contoh 2.

Carilah transformasi $L\{2 + \cos at\}$

Penyelesaian:

$$L\{2\} + L\{\cos at\} = \frac{2}{s} + \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$= \frac{2s^2 + 2a^2 + s^2}{s(s^2 + a^2)}$$

$$= \frac{3s^2 + 2a^2}{s(s^2 + a^2)}$$

B. Beberapa Sifat Penting dari Transformasi Laplace

1. Kelinearan

$$L\{c_1 \cdot F_1(t) + c_2 \cdot F_2(t)\} = c_1 \cdot L\{F_1(t)\} + c_2 \cdot L\{F_2(t)\}$$

$$= c_1 \cdot f_1(s) + c_2 \cdot f_2(s)$$

Contoh:

$$L\{4t^2 - 3 \cos 2t + 5e^{-t}\} = 4 \cdot L\{t^2\} - 3L\{\cos 2t\} + 5L\{e^{-t}\}$$

$$= 4 \cdot \frac{2!}{s^2+1} - 3 \cdot \frac{s}{s^2+2^2} + 5 \cdot \frac{1}{s-(-1)}$$

$$= \frac{8}{s^3} - \frac{3s}{s^2+4} + \frac{5}{s+1}$$

2. Translasi Pertama atau Pergeseran

Jika $L\{F(t)\} = f(s)$

Maka $L\{e^{at} \cdot F(t)\} = f(s-a)$

Contoh:

$$L\{e^{-t} \sin 2t\} = \dots$$

$$f(s) = L\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+2^2} = \frac{2}{s^2+4}$$

$$L\{e^{-t} \sin 2t\} = f(s+1)$$

$$L\{e^{-t} \sin 2t\} = \frac{2}{(s+1)^2+4} = \frac{2}{s^2+2s+5}$$

3. Translasi Kedua atau Pergeseran

$$\text{Jika } L\{F(t)\} = f(s) \text{ dan } G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

$$\text{Maka } L\{G(t)\} = e^{-as} \cdot f(s)$$

Contoh:

$$f(s) = L\{t^3\} = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{s^4} = \frac{6}{s^4}$$

$$\text{Dan } G(t) = \begin{cases} (t-2)^3 & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

$$\text{Maka } L\{G(t)\} = e^{-as} f(s)$$

$$= e^{-2s} \frac{6}{s^4} = \frac{6e^{-2s}}{s^4}$$

4. Perubahan Skala

$$\text{Jika } L\{F(t)\} = f(s)$$

$$\text{Maka } L\{F(at)\} = \frac{1}{a} \cdot f\left(\frac{s}{a}\right)$$

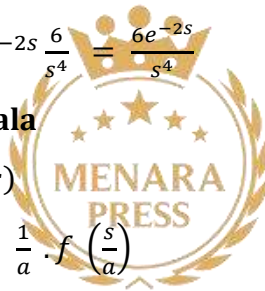
Contoh:

$$L\{\sin 3t\} = \dots$$

$$f(s) = L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1^2} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$f\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{\left(\frac{s}{3}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\frac{s^2}{9} + 1} = \frac{9}{s^2 + 9}$$

$$\begin{aligned} L\{\sin 3t\} &= \frac{1}{3} \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{s^2 + 9} = \frac{3}{s^2 + 9} \end{aligned}$$



C. Transformasi Laplace Turunan dan Integral

1. Transformasi Laplace dari Turunan

$$L \left\{ \frac{dF}{dt} \right\} = s \cdot L \{ F(t) \} - F(0)$$

$$L \left\{ \frac{d^2 F}{dt^2} \right\} = s^2 \cdot L \{ F(t) \} - s \cdot F(0) - \frac{dF}{dt}(0)$$

$$L \left\{ \frac{d^2 F}{dt^2} \right\} = s^2 \cdot L \{ F(t) \} - s^2 \cdot F(0) - s \cdot \frac{dF}{dt}(0) - \frac{d^2 F}{dt^2}(0)$$

$$L \left\{ \frac{d^2 F}{dt^2} \right\} = s^2 \cdot L \{ F(t) \} - s^2 \cdot F(0) - s^2 \cdot \frac{dF}{dt}(0) - s \cdot \frac{d^2 F}{dt^2}(0) - \frac{d^3 F}{dt^3}(0)$$

Contoh:

Selesaikanlah transformasi Laplace $\frac{dx}{dt} + x = e^t$ dengan syarat awal $x(0) = 0$!

$$\frac{dx}{dt} + x = e^t \rightarrow x(0) = 0$$

$$L \left\{ \left(\frac{dx}{dt} + x \right) \right\} = L \{ e^t \}$$

$$L \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} + L \{ x \} = L \{ e^t \}$$

$$s \cdot L \{ x \} - x(0) + L \{ x \} = \frac{1}{s-1}$$

$$s \cdot L \{ x \} - (0) + L \{ x \} = \frac{1}{s-1}$$

$$(s + 1) + L \{x\} = \frac{1}{s - 1}$$

$$L \{x\} = \frac{1}{(s + 1)(s - 1)}$$

Maka: $L \{x\} = y$

$$y = \frac{1}{(s + 1)(s - 1)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s - 1}$$

$$1 = A(s - 1) + B(s + 1)$$

Untuk $s = -1 \rightarrow 1 = A(-1 - 1) + B(-1 + 1)$

$$1 = -2A + 0$$

$$1 = -2A \rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Untuk $s = 1 \rightarrow 1 = A(1 - 1) + B(1 + 1)$

$$1 = 0 + 2B$$

$$1 = 2B \rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{(s + 1)(s - 1)} = \frac{-\frac{1}{2}}{s + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{s - 1}$$

$$y = \frac{1}{(s + 1)(s - 1)}$$

$$y = \frac{-\frac{1}{2}}{s + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{s - 1}$$

$$L \{x\} = y$$

$$x = L^{-1} \{y\}$$

$$x = L^{-1} \left\{ \frac{-\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s-1} \right\}$$

$$x = -\frac{1}{2} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} + \frac{1}{2} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\}$$

$$x = -\frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^t$$

2. Transformasi Laplace dari Integral

Jika $L \{F(t)\} = f(s)$,

maka: $L \left\{ \int_0^t F(u) du \right\} = \frac{f(s)}{s}$

Contoh:

$$L \left\{ \int_0^t \sin 2u du \right\} = \dots$$

$$L \{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$f(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$L \left\{ \int_0^t \sin 2u du \right\} = \frac{f(s)}{s}$$

$$= \frac{2}{\frac{s^2 + 4}{s}}$$

$$= \frac{2}{s(s^2 + 4)}$$

D. Invers dari Transformasi Laplace

Jika $\{F(t)\} = f(s)$,

Maka $F(t)$ disebut invers transformasi laplace dari $F(s)$, ditulis $L^{-1}\{s(s)\} = F(t)$

Sifat invers transformasi laplace:

1. $L^{-1}\{c_1 \cdot f_1(s) + c_2 \cdot f_2(s)\} = c_1 \cdot F_1(t) + c_2 \cdot F_2(t)$
2. $L^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at} \cdot F(t)$
3. $L^{-1}\left\{f\left(\frac{s}{a}\right)\right\} = a \cdot F(at)$

Contoh:

$$L^{-1}\left\{\left(\frac{4 - 5s}{s^{3/2}}\right)\right\} = \dots$$

$$L^{-1}\left\{\left(\frac{4 - 5s}{s^{3/2}}\right)\right\} = 4 L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s^{3/2}}\right)\right\} - 5 L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s^{3/2}}\right)\right\}$$

$$L\{t^n\} = \frac{\gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$t^n = L^{-1}\left\{\frac{\gamma(n+1)}{s^{n+1}}\right\}$$

$$t^n = \gamma(n+1) L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\}$$

$$\frac{t^n}{\gamma(n+1)} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{3/2}}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{2+1/2}}\right\}$$



$$= \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\gamma(\frac{1}{2}+1)} = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\gamma(\frac{1}{2})} = \frac{2t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{1/2}} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\frac{1}{2}+1}} \right\}$$

$$= \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\gamma(-\frac{1}{2}+1)} = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\gamma(\frac{1}{2})} = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{4-5s}{s^{3/2}} \right\} = 4L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{3/2}} \right\} - 5L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{1/2}} \right\}$$

$$= 4 \cdot \frac{2t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} - 5 \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{8t^{\frac{1}{2}} - 5t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$

Ringkasan Bab

- Transformasi Laplace adalah metode integral untuk mentransformasikan fungsi waktu menjadi fungsi kompleks.
- Alat ini sangat efektif dalam menyelesaikan persamaan diferensial linear.
- Sifat-sifat seperti linearitas, pergeseran waktu, dan transformasi turunan sangat penting dalam penggunaannya.
- Proses transformasi dan inverse Laplace memungkinkan penyelesaian sistem dinamis secara sistematis.

Latihan Soal

1. Hitung $\mathcal{L}\{\cos(3t)\}$
2. Tentukan transformasi Laplace dari $f(t) = te^{2t}$
3. Hitung transformasi Laplace dari $f''(t)$ jika $f(0) = 2, f'(0) = 0$, dan $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
4. Selesaikan persamaan diferensial $y' + 4y = 0, y(0) = 3$
5. Gunakan transformasi Laplace untuk menyelesaikan $y'' - y = 0, y(0) = 1, y' = 1$



DAFTAR PUSTAKA

- Abdul Rahman. 2000. Deret Fourier (Bahan Kuliah). Makassar: Universitas Negeri Makassar.
- Alit Bondan. 2007. Kalkulus Lanjut. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Anton, Howard, Irl Bivens, and Stephen Davis. Calculus. 10th Edition. Wiley, 2012.
- Edwin J. Purcell; Dale Varberg. 1993. Kalkulus dan Geometri Analitis (Edisi Kelima Jilid 2). Jakarta: Erlangga.
- Hasyim Baisuni. 2005. Kalkulus. Jakarta: Universitas Indonesia (UI-Pres).
- James Stewart. 2003. Kalkulus (Edisi keempat jilid 2). Jakarta: Erlangga.
- Karyadi. 1983. Transformasi Laplace. Surabaya: Usaha Nasional Surabaya.
- Kreyszig, E. (2011). Advanced Engineering Mathematics (10th Ed.). Wiley.
- Marsden, Jerrold E., and Anthony J. Tromba. Vector Calculus. 6th Edition. W. H. Freeman, 2012.
- Max, Subagio & Syaiful Kurniawan. (1981). Diferensial Parsial, Integral Berlipat Dua dan Tiga, Deret. Universitas Atma Jaya.

- Max, Subagio & Syaiful Kurniawan. 1981. Diferensial Parsial, Integral Berlipat Dua dan Tiga, Deret. Yogyakarta: Universitas Atma Jaya.
- Prayudi. 2009. Kalkulus Lanjut (Fungsi Banyak Variabel dan Penerapannya). Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Purcell, E. J., & Varberg, D. (2007). Calculus with Analytic Geometry. Prentice Hall.
- Purcell, E. J., & Varberg, D. (2007). Calculus with Applications. Pearson.
- Salusu. 2003. Teori dan Penyelesaian Kalkulus Lanjutan. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Spivak, M. (2006). Calculus (3rd ed.). Cambridge University Press.
- Stewart, J. (2015). Calculus: Early Transcendentals. Cengage Learning.
- Stewart, J. (2016). Calculus: Early Transcendentals (8th ed.). Cengage Learning.
- Thomas, G. B., & Finney, R. L. (2004). Calculus and Analytic Geometry. Addison-Wesley.
- Thomas, G. B., & Weir, M. D. (2018). Thomas' Calculus (14th ed.). Pearson.
- Wakaeia Gazali. 2007. Kalkulus Lanjut (Edisi 2). Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Widodo, S. A. (2020). Kalkulus Lanjut. Penerbit Erlangga.

- Widodo, S. A. (2021). Kalkulus Lanjut. Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Wono Setya Budhi. 2001. Kalkulus Peubah banyak dan Penggunaannya. Bandung: ITB Bandung.
- Zill, D. G., & Wright, W. S. (2014). Advanced Engineering Mathematics (5th Ed.). Jones & Bartlett Learning.

GLOSARIUM

Istilah	Definisi
Deret Fourier	Representasi fungsi periodik sebagai jumlah tak hingga sinus dan kosinus.
Diferensial Parsial	Turunan dari fungsi multivariabel terhadap satu variabel, variabel lainnya dianggap tetap.
Diferensial Total	Perubahan total dari suatu fungsi multivariabel akibat perubahan semua variabel bebasnya.
Fungsi Beta	Fungsi integral khusus yang terkait erat dengan fungsi Gamma.
Fungsi Gamma	Perluasan fungsi faktorial ke bilangan riil dan kompleks.
Fungsi Majemuk	Fungsi yang terbentuk dari penggabungan dua atau lebih fungsi.
Gradien	Vektor turunan parsial yang menunjukkan arah laju perubahan tercepat dari suatu fungsi.
Integral Lipat	Proses integrasi bertingkat pada fungsi dua atau lebih variabel.

Integral Lipat Dua	Integral pada fungsi dua variabel dalam suatu wilayah dua dimensi.
Integral Lipat Tiga	Integral pada fungsi tiga variabel dalam suatu wilayah tiga dimensi.
Konvergensi	Keadaan saat deret mendekati suatu nilai tertentu saat jumlah sukunya bertambah.
Limit	Nilai yang didekati oleh suatu fungsi saat variabel mendekati nilai tertentu.
Rantai Fungsi	Aturan turunan fungsi majemuk, juga dikenal sebagai <i>chain rule</i> .
Transformasi Laplace	Teknik transformasi integral untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear.
Turunan Parsial	Turunan fungsi multivariabel terhadap salah satu variabel, lainnya tetap.

BIODATA PENULIS



Dr. Mas'ud B., M.Pd

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Muhammadiyah Parepare

Dr. Mas'ud B., M.Pd. Penulis lahir di Majene pada tanggal 5 Desember 1963. Pendidikan Sekolah Dasar penulis tempuh di SD Negeri 2 Kampung Baru Majene dan selesai pada tahun 1976. Selanjutnya, penulis melanjutkan Pendidikan ke SMP Negeri 2 Majene hingga tahun 1980 dan SMA Negeri 1 Majene hingga tahun 1983. Penulis menyelesaikan Program Sarjana pada Jurusan Pendidikan Matematika IKIP Ujung Pandang pada tahun 1988, Program Master dibidang Pendidikan Matematika IKIP Surabaya pada tahun 1999 dan Program Doktor pada prodi Ilmu Pendidikan Universitas Negeri Makassar pada tahun 2017. Penulis merupakan dosen Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Parepare. Selain itu, penulis pernah menjadi konsultan pembelajaran matematika pada Rintisan

SMA Berstandar Internasional (R-SMA-BI) SMAN 2 Majene pada tahun 2007-2013, instruktur PLPG Rayon 124 UNM tahun 2009-2014 dan asesor Beban Kerja Dosen (BKD) dan Laporan Kerja Dosen (LKD) tahun 2009- sekarang Penulis dapat dihubungi melalui e-mail: umpar.masud@gmail.com

---000---